Lógica Proposicional Semántica

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto.

$$\{\ p \land q \rightarrow r,\ \ r \land s \rightarrow t\ \} \vDash \ \neg t \rightarrow \neg(p \land q) \lor s$$

examen LP 1415

2. Demuestra, mediante una interpretación, que la siguiente fórmula es satisfacible:

$$(s \leftrightarrow \neg p) \land ((q \lor r) \rightarrow (p \land s))$$

examen junio 2011

3. Averiguar si es o no cierta la siguiente afirmación:

$$p \rightarrow q \lor r \quad \vDash \quad (p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow r)$$

examen julio 2014

4. Analizar si hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión del siguiente argumento:

$$\{\ q \rightarrow \neg r,\ t \rightarrow p \land s,\ \neg s\ \} \mid\!== \ q \land r \rightarrow t$$

examen enero 2014

5. Demostrar con medios semánticos que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica

$$\{\ p \rightarrow s \land t,\ q \leftrightarrow \neg r,\ \neg(\neg s \lor q \rightarrow s \land \neg r)\ \} \vDash \ q \rightarrow t \lor p$$

examen enero 2015

6. Demostrar que NO se cumple la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \vDash p \rightarrow (q \rightarrow r \land s)$$

1ª eval 1314

7. Formalizar el siguiente razonamiento y analizar si es o no correcto:

Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿amas a Queta, a Petra o a Rosana?

El pensó: los hechos son:

> *Amo al menos a una de las tres. Si amo a Petra pero no a Queta, entonces amo a Rosana. O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres. Si amo a Queta, entonces también amo a Petra.*

Contestó:

> *Amo a las tres*

8. Determinar la corrección del siguiente argumento.

Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Demostrar **con medios semánticos** que el siguiente razonamiento no es correcto.

$$\{\ p \wedge q \rightarrow r,\ \ r \wedge s \rightarrow t\ \} \vDash\ \neg t\ \rightarrow\ \neg(p \wedge q) \vee s$$

Como dice el enunciado, el razonamiento es incorrecto.

Buscamos una interpretación I que haga las premisas verdaderas al mismo tiempo que hace la conclusión falsa.

Para que la conclusión sea falsa se necesita que (3.1) la parte izquierda de la implicación sea verdadera y (3.2) que la parte derecha sea falsa.

Para obtener (3.1), t tendrá que ser falsa según I, es decir, $I(t) = f$.

Para obtener (3.2), $I(\neg(p \wedge q) \vee s) = f$, es decir, se necesita (3.2.1) $I(\neg(p \wedge q)) = f$ y (3.2.2) $I(s) = f$.

(3.2.1) vale sólo si $I(p) = v$ e $I(q) = v$.

Todas estas condiciones tienen que darse al mismo tiempo, así que están fijados los valores de verdad asignados por I a p, q, t y s.

Para que la primera premisa sea verdadera, tiene que darse que la primera parte es falsa o la segunda es verdadera. Como la primera parte es verdadera por los valores asignados a p y q, se obtiene que obligatoriamente $I(r) = v$.

Del mismo modo, para que la segunda premisa sea verdadera, tiene que darse que la primera parte es falsa o la segunda es verdadera. Por los valores asignados a las proposiciones, la primera parte es falsa (porque $I(s) = f$) y la segunda también es falsa.

Acabamos de encontrar el contramodelo (o contraejemplo) que buscábamos:

$$I(p) = v; \quad I(q) = v; \quad I(r) = v; \quad I(s) = f; \quad I(t) = f$$

Demuestra, mediante una interpretación, que la siguiente fórmula es satisfacible:

$$(s \leftrightarrow \neg p) \wedge ((q \vee r) \to (p \wedge s))$$

$$\underset{A}{(s \leftrightarrow \neg p)} \quad \wedge \quad \underset{B}{((q \vee r) \to (p \wedge s))}$$

Buscamos una interpretación que haga verdaderas A y B:

- $i(A) = V$ $\qquad$ $i(s) = V$ y $i(\neg p) = V$, por ejemplo $\qquad$ $i(s) = V \quad i(p) = F$

$$\left.\begin{array}{l} \text{-}\ \ i(B) = i(\,(q \vee r) \to (p \wedge s)\,) = V \\[2ex] \qquad i(p) = F \longrightarrow i(p \wedge s) = F \end{array}\right\} \longrightarrow \quad i(q \vee r) = F \quad \longrightarrow \quad i(q) = i(r) = F$$

Esta interpretación , $i(s) = V$, $\;i(p) = i(q) = i(r) = F$, hace V la fórmula dada y, por tanto, satisfacible.

Averiguar si es o no cierta la siguiente afirmación:

$$\underset{A}{p \to q \vee r} \quad \models \quad \underset{B}{(p \to q) \vee (p \to r)}$$

*) Recordatorio:

1) $A \models B \quad \equiv \quad$ para toda $i \quad i(A) = V \Rightarrow i(B) = V$

2) $A \not\models B \Leftrightarrow$ existe i tal que $i(A) = V \wedge i(B) = F$

*) Por la vía directa:

Sea i interpretación tal que i(A) = V Veamos cómo es i(B)

$i(A) = i\,(p \to q\ \ r) = V \qquad$ 1) $i(p) = F$ o 2) $i(q \vee r) = V$

caso 1) $i(p) = F \qquad i(B) = i((p \to q) \vee (p \to r)) = V$

caso 2) $i(q \vee r) = V \qquad$ 2.1) $i(q) = V$ o 2.2) $i(r) = V$

2.1) $i(q) = V \quad i(p \to q) = V \quad i(B) = V$

2.2) $i(r) = V \quad i(p \to r) = V \quad i(B) = V$

$\Rightarrow$ SÍ es consecuencia lógica

*) Vía indirecta: <u>buscamos</u> interpretación i tal que $i(A) = V$ y $i(B) = F$

$i(B) = i((p \to q) \vee (p \to r)) = F \qquad i(p \to q) = i(p \to r) = F \qquad i(p) = V$ y $i(q) = i(r) = F$

y para esta interpretación:

$i(A) = i\,(p \to q \vee r) = F$

$\Rightarrow$ SÍ es consecuencia lógica

Analizar si hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión del siguiente argumento. Justificar debidamente la respuesta

$$\{\, q \rightarrow \neg\, r \,,\, t \rightarrow p \wedge s \,,\, \neg\, s \,\} \;|\!==\; q \wedge r \rightarrow t$$

$$\{\, \underset{A_1}{q \rightarrow \neg\, r} \,,\, \underset{A_2}{t \rightarrow p \wedge s} \,,\, \underset{A_3}{\neg\, s} \,\} \;|\!==\; \underset{B}{q \wedge r \rightarrow t}$$

*) Recordatorio:

1) $\{ A_1 , A_2 , A_3 \} \;|\!==\; B \quad \equiv \quad$ para toda i $\;(\; i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3 \;\Rightarrow\; i(B) = V \;)$

2) $\{ A_1 , A_2 , A_3 \} \;\not\models\; B \quad \Leftrightarrow \quad$ existe i tal que $\; i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3 \;\wedge\; i(B) = F$

*) Vía indirecta: <u>buscamos</u> i tal que $\; i(B) = F \;$ y $\; i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3$:

$i(B) = i(q \wedge r \rightarrow t) = F \longrightarrow i(q \wedge r) = V$ y $i(t) = F \longrightarrow i(q) = i(r) = V$ y $i(t) = F$

$i(A_1) = i(q \rightarrow \neg\, r) \quad = \quad F$

$\qquad i(q) = V$ y $i(\neg\, r) = F$

$\Rightarrow$ NO existe interpretación en las condiciones buscadas $\Rightarrow$ SÍ hay consecuencia lógica

*) Comprobación por la vía directa:

Sea i interpretación tal que $\; i(A_j) = V$ para todo j. Hay que probar $\; i(B) = V$

- $i(A_3) = i(\neg\, s) = V \longrightarrow i(s) = F$

- $i(A_2) = i(t \rightarrow p \wedge s) = V \longrightarrow i(t) = F$

  $i(s) = F \longrightarrow i(p \wedge s) = F$

- $i(A_1) = i(q \rightarrow \neg\, r) = V \qquad i(q) = F$ ó $i(\neg\, r) = V$

  1er caso: $i(q) = F \qquad i(B) = i(q \wedge r \rightarrow t) \quad = \quad V$

  $\qquad i(q) = F \quad i(q \wedge r) = F$

  $\qquad i(t) = F$

  2º caso: $i(\neg\, r) = V \qquad i(B) = i(q \wedge r \rightarrow t) \quad = \quad V$

  $\qquad i(r) = F \quad i(q \wedge r) = F$

  $\qquad i(t) = F$

Demostrar con medios semánticos que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica, sin utilizar tablas de verdad, ni deducción natural, ni el método de resolución.

$$\{ p \to s \wedge t , q \leftrightarrow \neg r , \neg(\neg s \vee q \to s \wedge \neg r) \} \models q \to t \vee p$$

- Recordatorio: Un argumento con premisas {A1,…, An} y conclusión B es correcto sii [A1,…, An] ⊨ B (es decir, existe relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión)

- Sea el argumento $\{ p \to s \wedge t , q \leftrightarrow \neg r , \neg (\neg s \vee q \to s \wedge \neg r) \} \models q \to t \vee p$, donde:

  A1: $p \to s \wedge t$

  A2: $q \leftrightarrow \neg r$

  A3: $\neg (\neg s \vee q \to s \wedge \neg r)$

  B: $q \to t \vee p$

  Se trata de demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica.

  Por tanto, tratamos de definir un contramodelo del argumento. Es decir, buscamos interpretación i tal que

  $i(B) = F \quad \wedge \quad i(Aj) = V \quad j = 1,2,3$

- $i(B) = i(q \to t \vee p) = F$ sii **$i(q) = V$** y
  $i(t \vee p) = F$ sii **$i(t) = F$** y **$i(p) = F$**

- $i(A1) = i(p \to s \wedge t) = V$ ya se cumple puesto que $i(p) = F$

- $i(A2) = i(q \leftrightarrow \neg r) = V$ sii $i(q) = i(\neg r) = V$ ó $i(q) = i(\neg r) = F$
  como $i(q) = V$ $i(\neg r) = V$ y **$i(r) = F$**

- $i(A3) = i(\neg (\neg s \vee q \to s \wedge \neg r)) = V$ sii $i(\neg s \vee q \to s \wedge \neg r) = F$ sii
  $i(\neg s \vee q) = V$ que ya se cumple pues $i(q) = V$
  y $i(s \wedge \neg r) = F$ como $i(\neg r) = V$ debe ser **$i(s) = F$**

⇒ Sí es posible definir un contramodelo del argumento:

$i(p) = F, i(q) = V, i(r) = F, i(s) = F, i(t) = F$

Por tanto el argumento no es correcto: **no hay relación de consecuencia lógica**

Demostrar que NO se cumple la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, sin utilizar tablas de verdad ni el método de resolución:

$$(p \to q) \to (q \to r) \vDash p \to (q \to r \wedge s)$$

$$\underbrace{(p \to q) \to (q \to r)}_{A} \quad |\!== \quad \underbrace{p \to (q \to r \wedge s)}_{B}$$

Recordatorio:

- $\Gamma \ |\!== B \quad \equiv \quad \forall$para toda i ($i(A_i) = V \ \ \forall$para todo $A_i \in \Gamma \Rightarrow i(B) = V$)
- $\Gamma \ |\!\not\!== \ B \quad \Leftrightarrow \quad \exists$xiste i tal que $i(A_i) = V \ \ \forall$para todo $A_i \in \Gamma \ \wedge \ i(B) = F$

*) La vía directa parece complicada: cada implicación V se abre en dos posibles casos a estudiar.

*) Probamos la vía indirecta (construcción de un contramodelo) : buscamos i tal que $i(A) = V$ y $i(B) = F$

- $i(B) = F = i(p \to (q \to r \wedge s)) \longrightarrow i(p) = V$ y $i(q \to r \wedge s)) = F$

$\longrightarrow \boxed{i(p) = V}$ y $\boxed{i(q) = V}$ y $i(r \wedge s)) = F$

$i(r) = F$ o $i(s) = F$

<u>1er caso</u>: $\boxed{i(r) = F}$ Hay dos interpretaciones, según sea $i(s)$

$$i(A) = i(\underbrace{(\overset{V}{p} \to \overset{V}{q})}_{V} \to \underbrace{(\overset{V}{q} \to \overset{F}{r})}_{F}) = F$$

<u>2º caso</u>: $\boxed{i(s) = F}$ Nuevamente hay dos interpretaciones

$$i(A) = i(\underbrace{(\overset{V}{p} \to \overset{V}{q})}_{V} \to (\overset{V}{q} \to \overset{??}{r})) = ??$$

depende de cómo sea $i(r)$. Si r es V, entonces

$$i(A) = i(\underbrace{(\overset{V}{p} \to \overset{V}{q})}_{V} \to \underbrace{(\overset{V}{q} \to \overset{V}{r})}_{V}) = V$$

Hemos encontrado una interpretación, $i(p) = i(q) = i(r) = V \ \ i(s) = F$, que hace verdadero el antecedente A y falsa la conclusión B (contramodelo)

$\Rightarrow$ No hay consecuencia lógica

Formalizar el siguiente razonamiento y analizar si es o no correcto:

Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿amas a Queta, a Petra o a Rosana?

El pensó: los hechos son:

Amo al menos a una de las tres. Si amo a Petra pero no a Queta, entonces amo a Rosana. O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres. Si amo a Queta, entonces también amo a Petra.

Contestó:

Amo a las tres

---

*) Formalización:

símbolos de enunciado:

P ≡ amo a Petra
Q ≡ amo a Queta
R ≡ amo a Rosana

formalización:

$$\begin{array}{l} P \lor Q \lor R \\ P \land \neg Q \to R \\ (Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land \neg R) \\ Q \to P \\ \hline P \land Q \land R \end{array}$$

*) <u>1ª forma</u> : construimos una demostración con las reglas del cálculo deducción natural:

1 -	$P \lor Q \lor R$	premisa
2 -	$P \land \neg Q \to R$	premisa
3 -	$(Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land \neg R)$	premisa
4 -	$Q \to P$	premisa
5 -	$(Q \land R) \lor \neg (P \lor Q \lor R)$	De Morgan 3 (+ th intercambio)
6 -	$Q \land R$	corte 5,1
7 -	Q	elim ∧ 6
8 -	P	modus ponens 7,4
9 -	$P \land Q \land R$	int ∧ 8,6

$\{1, 2, 3, 4\} \vdash P \land Q \land R \xrightarrow[\text{th de validez}]{}$ el razonamiento es correcto

*) 2^a forma : semánticamente, aplicando el concepto de consecuencia lógica:

$\{ A_1 , A_2 , A_3 , A_4\} \models B \quad \equiv \quad$ para toda i ($i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3,4 \Rightarrow i(B) = V$)

$\{ A_1 , A_2 , A_3 , A_4\} \not\models B \quad \Leftrightarrow \quad$ existe i tal que $i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3,4 \wedge i(B) = F$

- Tratamos de encontrar una interpretación i tal que $i(B) = F$ y $i(A_j) = V \;\; j = 1,2,3,4$

$I(B) = i(P \wedge Q \wedge R) = F \longrightarrow$ $i(P) = F$ 1er caso ó
$i(Q) = F$ 2ºcaso ó
$i(R) = F$ 3er caso

1er caso : $\boxed{i(P) = F}$

$i(A_4) = i(Q \to P) = V$ $\boxed{i(Q) = F}$
$i(P) = F$

$i(A_1) = i(P \vee Q \vee R) = V$ $\boxed{i(R) = V}$
$i(P) = i(Q) = F$

con esta interpretación $i(A_2) = i(P \wedge \neg Q \to R) = \longrightarrow V$
$i(P \wedge \neg Q) = F \quad i(R) = F$

$i(A_3) = i((Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)) = \longrightarrow F$
$i(Q \wedge R) = F \quad i((\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) = F$

no hay interpretación que haga F a la fórmula B y V todas las A_j

2º caso : $\boxed{i(Q) = F}$

$i(A_4) = i(Q \to P) = V$
$i(Q) = F$

$i(A_3) = i((Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)) = V$ $i(\neg P)= i(\neg R) = V$ $\boxed{i(P)= i(R) = F}$
$i(Q \wedge R) = F \quad i(Q) = V$

con esta interpretación $i(A_1) = i(P \vee Q \vee R) = F$

tampoco hay interpretación que haga F a B y V todas las A_j

3er caso : $\boxed{i(R) = F}$

$i(A_3) = i((Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)) = V$ $i(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) = V$
$i(Q \wedge R) = F$ $i(\neg R) = V$

$i(\neg P)= i(\neg Q) = V$ $\boxed{i(P)= i(Q) = F}$

que es la misma interpretación que en el 2º caso.

$\Rightarrow$ NO existe interpretación i tal que $i(A_j) = V \quad j = 1,2,3,4 \quad \wedge \quad i(B) = F$

$\Rightarrow \quad \{ A_1 , A_2 , A_3 , A_4\} \;|==\; B$ $\quad\Rightarrow\quad$ El razonamiento es correcto.

Determinar la corrección del siguiente argumento.

Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

---

*) Formalización:

x es animal con pelo:	pl		
x da leche	lc	1 –	$pl \lor lc \to m$
x es mamífero	m		
x tiene pezuñas	pz		
x rumia	r	2 -	$m \land (pz \lor r) \to u$
x es ungulado	u		
x tiene cuello largo	lg		
x es jirafa	j	3 –	$u \land lg \to j$
x tiene rayas negras	n		
x es cebra	c	4 -	$u \land n \to c$

conclusión: $pl \land pz \land n \to c$

*) ¿Es consecuencia lógica? $\{ 1, 2, 3, 4 \} \models pl \land pz \land n \to c$???

- $2^{10} = 32.32 = 1024$ valoraciones

- utilizamos la forma negada de consecuencia lógica:

$\Gamma \not\models B \quad \Leftrightarrow \quad$ existe i tal que $i(A_i) = V$ para todo $A_i \in \Gamma \land i(B) = F$

- sea i interpretación tal que $i(pl \wedge pz \wedge n \rightarrow c) = F$ $\longrightarrow$ $\boxed{i(pl) = i(pz) = i(n) = V \quad y \quad i(c) = F}$

- para estas interpretaciones ($2^6 = 64$) ¿cómo son A1, A2, A3, A4? , ¿existe i tal que $i(Aj) = V$ $j = 1 \ldots 4$?

$A1 \equiv pl \vee lc \rightarrow m$ $\quad$ $i(A1) = V$

$i(pl) = V \quad i(pl \vee lc) = V \longrightarrow \boxed{i(m) = V}$

$A4 \equiv u \wedge n \rightarrow c$ $\quad$ $i(A4) = V$

$i(n) = V \quad i(c) = F \longrightarrow \boxed{i(u) = F}$

$A2 \equiv m \wedge (pz \vee r) \rightarrow u$ $\quad$ $i(A2) = V$

$i(u) = F \quad i(m \wedge (pz \vee r)) = F$

$i(m) = V \quad i(pz \vee r) = F$

$i(pz) = V$ ¡¡¡¡¡¡

NO existe interpretación que haga F la conclusión y V todas las premisas

$\Rightarrow$ SÍ es consecuencia lógica $\Rightarrow$ El argumento es correcto

*) Comprobación con deducción natural:

…//…

1 - $pl \lor lc \rightarrow m$

2 - $m \land (pz \lor r) \rightarrow u$

3 - $u \land lg \rightarrow j$

4 - $u \land n \rightarrow c$

5 - $pl \land pz \land n$

6- $\neg c$

7- $\neg (u \land n)$

8 - $\neg u \lor \neg n$

9 - n

10 - $\neg u$

11 - $\neg (m \land (pz \lor r))$

12 - $\neg m \lor \neg (pz \lor r)$

13 - $\neg m \lor (\neg pz \land \neg r)$

14 - $(\neg m \lor \neg pz) \land (\neg m \lor \neg r)$

15 - $\neg m \lor \neg pz$

16 - pz

17 - $\neg m$

18 - $\neg (pl \lor lc)$

19 - $\neg pl \land \neg lc$

20 - $\neg pl$

21 - pl

22- $\neg \neg c$

23 - c

24 - $pl \land pz \land n \rightarrow c$