Lógica Proposicional Deducción natural

Ejercicios resueltos - Enunciados

Demostrar con deducción natural:

1. $T\ [\, p \rightarrow r, q \rightarrow r \,] \vdash (p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$

repesca LP enero 2017

2. $T\ [\, p \rightarrow (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ , \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t \,] \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$

examen julio 2015

3. $T\ [\, p \rightarrow \neg t,\ q \wedge \neg s \rightarrow r,\ \neg(q \wedge r) \,] \vdash q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$

examen enero 2015

4. $T\ [\, \neg p \vee q\ ,\ q \vee r \rightarrow s\ ,\ \neg r \rightarrow p \,] \vdash s$

examen enero 2014

5. $T[\, p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q, r \rightarrow \neg s \,] \vdash \neg s \vee \neg p$

eval LP 1415

6. $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

examen julio 2017

7. $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \vdash \neg q \vee (p \vee r)$

Universidad de Sevilla, examen abril 2005, i

8. Probar $A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Demostrar con deducción natural

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \vdash (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

eval LP 1516

1-	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	premisa
2-	$p \wedge q$	supuesto
3-	$p \rightarrow r$	supuesto
4-	p	elim $\wedge$ 2
5-	r	modus ponens 4, 3
6-	$r \vee s$	int $\vee$ 5
7-	$(p \rightarrow r) \rightarrow (r \vee s)$	int $\rightarrow$ 3, 6
8-	$q \rightarrow s$	supuesto
9-	q	elim $\wedge$ 2
10-	s	modus ponens 9,8
11-	$r \vee s$	int $\vee$ 10
12-	$(q \rightarrow s) \rightarrow (r \vee s)$	int $\rightarrow$ 8, 11
13-	$r \vee s$	elim $\vee$ 1 , 7, 12
14-	$p \wedge q \rightarrow r \vee s$	int $\rightarrow$ 2, 13

Para hacerlo un poco más comprensible se puede añadir:

3- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$ iteración 1

Demostrar mediante **deducción natural**

$$T\ [\ p \rightarrow (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ ,\ \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t\ ]\ \vdash\ p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$$

Fuente: examen julio 2015

*) Esquema de la demostración:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
.....	....	
.....	....	
17 -	$\neg s$	
18 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 17
19 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,18

*) Demostración completa:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
6 -	$q \vee \neg r$	modus ponens 4,1
7 -	$\neg r$	corte 5,7
8 -	$\neg r \rightarrow \neg t$	elim $\leftrightarrow$ 2
9 -	$\neg t$	modus ponens 7,8
10 -	$\neg\neg(p \rightarrow \neg s)$	modus tollens 9,3
11 -	$p \rightarrow \neg s$	doble negación 10
12 -	$\neg s$	modus ponens 4, 11
13 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 12
14 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,13

Demostrar mediante **deducción natural**, justificando adecuadamente cada uno de los pasos dados, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T [\ p \rightarrow \neg t,\ \ q \wedge \neg s \rightarrow r,\ \ \neg(q \wedge r)\ ]\ \vdash\ q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$$

Fuente: examen enero 2015

- 1ª forma:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	| $q \wedge t$	supuesto
5.	| | p	supuesto
6.	| | $\neg t$	m. p. 5,1
7.	| | t	elim $\wedge$ 4
8.	| | $t \wedge \neg t$	int $\wedge$ 6,7
9.	| $\neg p$	int $\neg$ 5, 8
10.	| | $\neg s$	supuesto
11.	| | q	elim $\wedge$ 4
12.	| | $q \wedge \neg s$	int $\wedge$ 10,11
13.	| | r	modus ponens 12,2
14.	| | $\neg q \vee \neg r$	De Morgan $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ 3, th intercambio
15.	| | $\neg q$	corte 13, 14
16.	| | $q \wedge \neg q$	int $\wedge$ 11,15
17.	| $\neg\neg s$	int $\neg$ 10, 16
18.	| s	elim $\neg$ 17
19.	| $\neg p \wedge s$	int $\wedge$ 9, 18
20.	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	int $\rightarrow$ 4, 19

*) justificación:

- puesto que hay que demostrar una implicación, SIEMPRE, "supongamos el antecedente":

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	| $q \wedge t$	supuesto
	| ……..	
	| ……..	
	| ……..	
	| ……..	
	| ……..	
n.	| $\neg p \wedge s$	
n+1.	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	int $\rightarrow$ 4, n

- puesto que ahora hay que demostrar una conjunción:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$\quad q \wedge t$	supuesto
	$\quad$ …….	
	$\quad$ …….	
	$\quad$ …….	
j.	$\quad \neg p$	
	$\quad$ ……..	
	$\quad$ ……..	
	$\quad$ ……..	
k.	$\quad s$	
	$\quad \neg p \wedge s$	int $\wedge$ j, k
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	

- y *¬p* y *s* se demuestran por contradicción:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
	$\quad q \wedge t$	supuesto
	$\quad\quad p$	supuesto
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad\quad$ …..	
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad \neg p$	
	$\quad\quad \neg s$	
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad\quad$ ……	
	$\quad \neg\neg s$	
	$\quad s$	
	$\quad \neg p \wedge s$	
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	

- <u>2ª solución</u>:

1.	$p \to \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \to r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$\quad\vert\ q \wedge t$	supuesto
5.	$\quad\vert\ t$	elim $\wedge$ 4
6.	$\quad\vert\ \neg\neg t$	th intercambio en 5 y equivalencia $\neg\neg A \equiv A$
7.	$\quad\vert\ \neg p$	modus tollens 1,6
8.	$\quad\vert\ \neg q \vee \neg r$	th intercambio en 3 y De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
9.	$\quad\vert\ q$	elim 4
10.	$\quad\vert\ \neg r$	corte 8,9
11.	$\quad\vert\ \neg(q \wedge \neg s)$	modus tollens 2,10
12.	$\quad\vert\ \neg q \vee \neg\neg s$	th intercambio en 11 y De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
13.	$\quad\vert\ \neg q \vee s$	th intercambio en 12 y equivalencia $\neg\neg A \equiv A$
14.	$\quad\vert\ s$	corte 9,13
15.	$\quad\vert\ \neg p \wedge s$	int $\wedge$ 7,14
16.	$q \wedge t \to \neg p \wedge s$	int $\to$ 4,15

- <u>3ª forma</u>:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
5.	$\neg(\neg p \wedge s)$	supuesto
	$p \vee \neg s$	De Morgan + doble negación
	p	supuesto
	….	
	….	
	….	
	A	
	…..	
	…..	
	$\neg A$	
	$\neg s$	supuesto
	……	
	……	
	B	
	……	
	$\neg B$	
	$\neg p \wedge s$	$\longrightarrow$ $A \vee B$
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	

$$\left.\begin{array}{l} A \vee B \\ A \vdash C \wedge \neg C \\ B \vdash D \wedge \neg D \end{array}\right\} \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$T[\neg p \vee q\ ,\ q \vee r \rightarrow s\ ,\ \neg r \rightarrow p\ ]\ \vdash s$$

Fuente: examen enero 2014

1.	$\neg p \vee q$	premisa
2.	$q \vee r \rightarrow s$	premisa
3.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4.	$\neg\neg r \vee p$	Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
5.	$r \vee p$	Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
6.	$q \vee r$	Regla derivada de corte 1,5
7.	s	Modus Ponens 2,6

2ª solución:

1 -	$\neg p \vee q$	premisa
2 -	$q \vee r \rightarrow s$	premisa
3 -	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4 -	$\vert\ \neg s$	supuesto
5 -	$\vert\ \neg(q \vee r)$	modus tollens 4,2
6 -	$\vert\ \neg q \wedge \neg r$	De Morgan 5 con th intercambio $\neg(A\vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
7 -	$\vert\ \neg r$	elim $\wedge$ 6
8 -	$\vert\ p$	modus ponens 7,3
9 -	$\vert\ q$	corte 8,1
10 -	$\vert\ \neg q$	elim $\wedge$ 6
11 -	$\vert\ q \wedge \neg q$	int $\wedge$ 9,10
12 -	$\neg\neg s$	int $\neg$ 4, 11
13 -	s	elim $\neg$ 12

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso.

$T[\, p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q, r \rightarrow \neg s \,] \vdash \neg s \vee \neg p$

Fuente: eval LP 1415

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$\neg r \rightarrow \neg q$	premisa
3.	$r \rightarrow \neg s$	premisa
4.	s	supuesto
5.	p	supuesto
6.	q	modus ponens 1,5
7.	$\neg\neg q$	teorema de intercambio con la equivalencia $A \equiv \neg\neg A$
8.	$\neg\neg r$	modus tollens 2,7
9.	r	E¬ 8
10.	$\neg s$	modus ponens 3,9
11.	$s \wedge \neg s$	I∧ 4,10
12.	$\neg p$	I¬ 5,11
13.	$s \rightarrow \neg p$	I→ 4,12
14.	$\neg s \vee \neg p$	teorema de intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Demostrar con deducción natural

$\vdash \ ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$

Fuente: Universidad de Sevilla, examen septiembre 2005

1-	$(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p$	supuesto
2-	$\neg p$	supuesto
3-	$\neg(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$	modus tollens 2,1
4-	$\neg(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$	T. intercambio 3, con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
5-	$\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	De Morgan 4 $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ con t. intercambio
6-	$\neg\neg p$	elim $\wedge$ 5
7-	p	elim $\neg$ 6
8-	$\neg p$	iteración 2
9-	$p \wedge \neg p$	int $\wedge$ 7,8
10-	$\neg\neg p$	int $\neg$2, 9
11-	p	elim $\neg$ 10
	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	int $\rightarrow$ 1, 11

*) Comprobación con tablas de verdad:

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$A \equiv ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p)$	$A \rightarrow p$
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V

($\Rightarrow$ NO HACE FALTA llenar toda la tabla)

Demostrar con deducción natural

$$((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \vdash \neg q \vee (p \vee r)$$

Fuente: Universidad de Sevilla, examen abril 2005, i

1-	$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg p \wedge r$	premisa
2-	$\neg(\neg q \vee p \vee r)$	supuesto
3-	$\neg\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 2 con $\neg(A \vee B \vee C) \equiv \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
4-	$q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 3 con $\neg\neg A \equiv A$
5 -	$\neg p$	eliminación $\wedge$ 3
6-	$\neg p \vee \neg q$	introducción $\vee$ 5
7-	$\neg p \wedge r$	modus ponens 1,6
8 -	r	eliminación $\wedge$ 7
9-	$\neg r$	eliminación $\wedge$ 3
10-	$r \wedge \neg r$	int $\wedge$ 8,9
11-	$\neg\neg(\neg q \vee p \vee r)$	introducción $\neg$ 2,10
12 -	$\neg q \vee p \vee r$	eliminación $\neg$ 11

$$A \leftrightarrow B \ \vdash \ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

*) Lo que se pide demostrar es cierto, analizando el significado de las dos fórmulas que aparecen en la deducción: A y B son equivalentes sii A y B son o verdaderos o falsos al mismo tiempo, que es lo que dice textualmente la fórmula $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1 -	$A \leftrightarrow B$	premisa
2 -	$A \rightarrow B$	elim $\leftrightarrow$ 1
3 -	$B \rightarrow A$	elim $\leftrightarrow$ 1
4 -	$\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	supuesto
5 -	$\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$	De Morgan 4
6 -	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$	De Morgan 5
7 -	$A \vee B$	elim $\wedge$ 6
8 -	A	supuesto
9 -	B	modus ponens 8, 2
10 -	B	supuesto
11 -	B	iteración 10
12 -	B	elim $\vee$ 7, 8-9, 10-11
13 -	$\neg A \vee \neg B$	elim $\wedge$ 6
14 -	$\neg A$	supuesto
15 -	$\neg B$	modus tollens, 14, 3
16 -	$\neg B$	supuesto
17 -	$\neg B$	iteración 16
18 -	$\neg B$	elim $\vee$ 13, 14-15, 16-17
19 -	$\neg\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	int $\neg$ 4, 12, 18
20 -	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	elim $\neg$ 19