Lógica Curso 2015-16 Deducción natural en LP

Ejercicios resueltos - Enunciados

Demostrar mediante deducción natural:

1. $T\,[p \rightarrow q \vee r,\ q \rightarrow \neg p] \ \vdash\ p \rightarrow r$

2. $A \vee B,\ A \rightarrow C,\ \neg D \rightarrow \neg B \ \vdash\ C \vee D$

3. $T\,[\,p \rightarrow (q \vee \neg r),\ \neg r \leftrightarrow \neg t,\ \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t\ ] \vdash\ p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$

4. $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \ \vdash\ r \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow s))$

5. $\{\, q \wedge t \wedge u,\ t \rightarrow (p \wedge \neg s),\ (p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \,\} \vdash r$

6. $\vdash\ ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

   $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \ \vdash\ \neg q \vee (p \vee r)$

7. $(p \vee q) \rightarrow r \ \vdash\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

8. $T \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg (r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

Demostrar mediante deducción natural:

$$T\,[\,p \rightarrow q \vee r\,,\; q \rightarrow \neg p\,] \vdash p \rightarrow r$$

1 -	$p \rightarrow q \vee r$	premisa
2 -	$q \rightarrow \neg p$	premisa
3 -	p	supuesto
4 -	$\neg r$	supuesto
5 -	$q \vee r$	modus ponens 3,1
6 -	q	corte 4,5
7 -	$\neg p$	modus ponens 6,2
8 -	p	iteración 3
9 -	$\neg\neg r$	int ¬ 4, 7, 8
10 -	r	elim ¬ 9
11 -	$p \rightarrow r$	int → 3, 10

$$A \vee B,\ A \rightarrow C,\ \neg D \rightarrow \neg B \ \vdash\ C \vee D$$

1 -	$A \vee B$		premisa
2 -	$A \rightarrow C$		premisa
3 -	$\neg D \rightarrow \neg B$		premisa
4 -		$\neg (C \vee D)$	supuesto
5 -		$\neg C \wedge \neg D$	De Morgan
6 -		$\neg C$	elim $\wedge$ 5
7 -		$\neg A$	modus tollens 6, 2
8 -		B	corte 7,1
9 -		$\neg D$	elim $\wedge$ 5
10 -		$\neg B$	modus ponens 9, 3
11 -	$\neg\neg (C \vee D)$		int $\neg$ 4, 8,10
12 -	$C \vee D$		elim $\neg$ 11

Demostrar mediante **deducción natural**

$$T\ [\ p \rightarrow (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ ,\ \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t\ \ ]\ \vdash\ p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$$

---

*) Esquema de la demostración:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
.....	....	
.....	....	
17 -	$\neg s$	
18 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 17
19 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,18

*) Demostración completa:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
6 -	$q \vee \neg r$	modus ponens 4,1
7 -	$\neg r$	corte 5,7
8 -	$\neg r \rightarrow \neg t$	elim $\leftrightarrow$ 2
9 -	$\neg t$	modus ponens 7,8
10 -	$\neg\neg(p \rightarrow \neg s)$	modus tollens 9,3
11 -	$p \rightarrow \neg s$	doble negación 10
12 -	$\neg s$	modus ponens 4, 11
13 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 12
14 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,13

Demostrar con deducción natural $p \to (q \to (r \to s)) \vdash r \to (q \to (p \to s))$

1-	$p \to (q \to (r \to s))$	premisa
2-	r	supuesto
3-	q	supuesto
4-	p	supuesto
5-	$q \to (r \to s)$	modus ponens 4,1
6-	$r \to s$	modus ponens 3,5
7-	s	modus ponens 2,6
8-	$p \to s$	int $\to$ 4,7
9-	$q \to (p \to s)$	int $\to$ 3,8
10-	$r \to (q \to (p \to s))$	int$\to$ 2,9

$\{ q \wedge t \wedge u \ , \ t \rightarrow (p \wedge \neg s) \ , \ (p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \ \} \vdash r$

1 -	$q \wedge t \wedge u$	premisa
2 -	$t \rightarrow (p \wedge \neg s)$	premisa
3 -	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$	premisa
4 -	t	elim $\wedge$ 1
5 -	$p \wedge \neg s$	modus ponens 4, 2
6 -	q	elim $\wedge$ 1
7 -	$q \rightarrow \neg (p \wedge \neg r)$	contraposición 3 + elim $\neg$
8 -	$\neg (p \wedge \neg r)$	modus ponens 6, 7
9 -	$\neg p \vee \neg\neg r$	De Morgan 8
10 -	$\neg p \vee r$	elim $\neg$ 9 + th intercambio
11 -	p	elim $\wedge$ 5
12 -	r	corte 10, 11

Otra solución:

1 -	$q \wedge t \wedge u$		premisa
2 -	$t \rightarrow (p \wedge \neg s)$		premisa
3 -	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$		premisa
4 -		$\neg r$	supuesto
5 -		q	elim $\wedge$ 1
6 -		$\neg (p \wedge \neg r)$	modus tollens 5, 3
7 -		$\neg p \vee r$	De Morgan 6 + elim $\neg$
8 -		$\neg p$	corte 4,7
9 -		t	elim $\wedge$ 1
10 -		$p \wedge \neg s$	modus ponens 9, 2
11 -		p	elim $\wedge$ 10
12 -	$\neg\neg r$		int $\neg$ 4, 8, 11
13 -	r		elim $\neg$ 12

Demostrar con deducción natural

a) $\vdash \; ((p \to q) \lor (p \to r)) \to (p \to q \lor r)$

b) $((\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r)) \;\vdash\; \neg q \lor (p \lor r)$

---

a)

1 -	$(p \to q) \lor (p \to r)$	supuesto
2 -	p	supuesto
3 -	$p \to q$	supuesto
4 -	q	modus ponens 2, 3
5 -	$q \lor r$	int $\lor$ 4
6 -	$p \to r$	supuesto
7 -	r	modus ponens 2, 6
8 -	$q \lor r$	int $\lor$ 7
9 -	$q \lor r$	elim $\lor$ 1, 3-5, 6-8
10 -	$p \to q \lor r$	int $\to$ 2, 9
11 -	$((p \to q) \lor (p \to r)) \to (p \to q \lor r)$	int $\to$ 1, 10

... // ...

b)

1-	$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg p \wedge r$	premisa
2-	$\neg(\neg q \vee p \vee r)$	supuesto
3 -	$q \wedge \neg p \vee \neg r$	de Morgan + doble negación + th intercambio
4 -	$\neg p$	eliminación $\wedge$ 3
5-	$\neg p \vee q$	introducción $\vee$ 4
6-	$\neg p \wedge r$	modus ponens 5,1
7 -	r	eliminación $\wedge$ 6
8-	$\neg r$	eliminación $\wedge$ 3
9 -	$\neg\neg(\neg q \vee p \vee r)$	introducción $\neg$ 2,7,8
10 -	$\neg q \vee p \vee r$	eliminación $\neg$ 9

Demostrar con deducción natural $(p \vee q) \to r \quad \vdash \quad (p \to r) \wedge (q \to r)$

*) Esbozo :

$(p \vee q) \to r$

___

___

___

$p \to r$

___

___

___

$q \to r$

$(p \to r) \wedge (q \to r)$ int $\wedge$

*) Demostración detallada:

1-	$p \vee q \to r$	premisa
2-	$\quad\mid\ p$	supuesto
3-	$\quad\mid\ p \vee q$	introducción $\vee$ 2
4-	$\quad\mid\ r$	modus ponens 3,1
5-	$p \to r$	introducción $\to$ 2,4
6-	$\quad\mid\ q$	supuesto
7-	$\quad\mid\ p \vee q$	introducción $\vee$ 6
8-	$\quad\mid\ r$	modus ponens 7,1
9-	$q \to r$	introducción $\to$ 6,8
10-	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	introducción $\wedge$ 5,9

$$T \vdash (p \to \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \to (q \to \neg r)$$

1 -	$(p \to \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p)$	supuesto
2 -	$p \to \neg q$	elim $\wedge$ 1
3 -	$\neg(r \wedge \neg p)$	elim $\wedge$ 1
4 -	q	supuesto
5 -	$\neg p$	modus tollens 3,2
6 -	$\neg r \vee p$	De Morgan + elim $\neg$ 3 + th interc.
7 -	$\neg r$	corte 5,6
8 -	$q \to \neg r$	int $\to$ 4, 7
9 -	$(p \to \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \to (q \to \neg r)$	int $\to$ 1,8