Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

Lógica
Conceptos básicos

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

¿Qué es la Lógica?

Es una ciencia formal que estudia los ***principios de los razonamientos correctos***

Es posible distinguir los razonamientos correctos de los incorrectos independientemente de que estemos o no de acuerdo con el contenido que expresen dichos razonamientos.

La Lógica es la disciplina que estudia esta distinción determinando las condiciones bajo las cuales la verdad de ciertas creencias conduce con certeza a la verdad de alguna otra creencia.

OJO!

la Lógica no garantiza que siempre lleguemos a conclusiones verdaderas

Definiciones

De *razonamiento*:

- “Un razonamiento es aquel discurso en el que, sentadas ciertas proposiciones, se sigue **necesariamente** de ellas algo distinto de lo previamente establecido” (Aristóteles)

De *lógica* (más recientes):

- “La lógica es el estudio de los razonamientos válidos o correctos” (Manzano, Huertas)
- “Formal Logic is a formal version of human deductive logic. It provides a formal language with an unambiguous syntax and a precise meaning, and it provides rules for manipulating expressions in a way that respects this meaning” (Standford Logic Group)

¿Qué hace que un razonamiento convenza?

Factores:

- Factores externos: creencias previas de la audiencia, interés del tema, personalidad, etc.
- Factores internos: la estructura del razonamiento, su forma lógica

Para probar la verdad de una conclusión se necesita:

- (factor externo) que el punto de partida (las premisas) sea cierto
  - p.ej. que describa correctamente los síntomas al médico
- (factor interno) que el camino de las premisas a la conclusión no contenga errores (es el trabajo del lógico)
  - p.ej. que el médico me de un diagnóstico

Problemas con el lenguaje natural

Hablando de queso Emmental:

cuanto más queso, más agujeros

cuantos más agujeros, menos queso

por tanto, cuanto más queso, menos queso

La conclusión es incorrecta. ¿Qué ha fallado?

- ❑ las premisas?
- ❑ la deducción?
- ❑ otra cosa?

☞ Hay ambigüedad en la semántica de las premisas

tomado de Damiano Zanardini

Analizamos un razonamiento

Si Picasso nació en Málaga, entonces no es cierto que naciera en Francia.

Picasso no nació en Francia.

Por tanto, Picasso nació en Málaga.

- El razonamiento puede convencer, pero posiblemente porque tanto premisas como conclusión se sabe que son verdaderas.
- Sin embargo, su validez *formal* es cuestionable

y otro similar

Si Goya nació en Cuba, entonces no es cierto que naciera en Canadá.

Goya no nació en Canadá.

Por tanto, Goya nació en Cuba.

- ❑Se aprecia con más claridad que el razonamiento no es correcto
- ❑Premisas verdaderas y conclusión falsa: la *forma* del argumento es errónea.

Forma y contenido

- *Si Picasso nació en Málaga, entonces no es cierto que naciera en Francia. Picasso no nació en Francia. Por tanto, Picasso nació en Málaga.*
- *Si Goya nació en Cuba, entonces no es cierto que naciera en Canadá. Goya no nació en Canadá. Por tanto, Goya nació en Cuba.*

¿Qué tienen en común ambos razonamientos?: *La forma*

- Si X nació en Y entonces no es cierto que naciera en Z. X no nació en Z. Por tanto, X nació en Y.
- Si *<oración1>* entonces no es cierto que *<oración2>*. No *<oración2>*. Por tanto, *<oración1>*.
- Si p entonces no q. No q. Por tanto, p.
- $[p \rightarrow \neg q, \neg q] \models p$

Otro razonamiento a analizar

Todos los perros son mamíferos

Todos los mamíferos son seres racionales

Por tanto, todos los perros son seres racionales

- Podríamos discrepar de la veracidad de estas afirmaciones, pero estaríamos de acuerdo en que el proceso de razonamiento es consistente
- La *forma* de este razonamiento es correcta

y uno más

All borogoves are slithy toves
All slithy toves are mimsy
Therefore, all borogoves are mimsy

- Todos los *X* son *Y*
  Todos los *Y* son *Z*
  Por tanto, todos los *X* son *Z*

forma del razonamiento

- Este razonamiento es válido aunque no entendamos nada de su significado → ***Independiente del contenido***

Validez formal

- La Lógica es el estudio del razonamiento, formalizado mediante la relación de *consecuencia lógica*

$$\models$$

- Múltiples razonamientos comparten una misma forma difiriendo únicamente en su contenido

- Formalizar un razonamiento: generalizar y sobre todo hacer explícitos los elementos de los que depende su validez y apartar aquellos otros que le dan contenido

- Propiedad central de una forma argumental válida: conclusión *necesariamente* cierta si las premisas lo son.

Validez formal 2

- Podemos estar de acuerdo con el camino que sigue un razonamiento aunque discrepemos de sus puntos de partida y de llegada.
  - Es decir, es posible distinguir los razonamientos válidos de los inválidos **independientemente** de que estemos o no de acuerdo con el contenido que expresen dichos razonamientos.

- Dicho de forma muy simple, la lógica es la disciplina que estudia esta distinción determinando las condiciones bajo las cuales la verdad de ciertas creencias **conduce con certeza** a la verdad de alguna otra creencia.
  - La lógica estudia, pues, los principios de los razonamientos correctos.

- La lógica **no garantiza** que siempre lleguemos a conclusiones verdaderas, ya que algunas veces las creencias de las que partimos son erróneas.
  - (como suponer que todos los mamíferos son seres racionales).

- Lo que sí garantiza la lógica es que siguiendo los principios de los razonamientos correctos, no surjan otros errores aparte de los derivados de la posible falsedad de los conocimientos que sustancian nuestros razonamientos.

¿Qué vamos a estudiar en Lógica?

Elementos necesarios para estudiar la relación de consecuencia ($\models$):

- ❑Distinción entre forma y contenido en los razonamientos en lenguaje natural
- ❑Definición de un lenguaje en el que expresar de forma precisa la información y los razonamientos (*lenguaje formal*)
- ❑Establecer la traducción entre las expresiones naturales y los símbolos formales (*formalización*)
- ❑Definición precisa del significado de dicho simbolismo (*semántica formal*)
- ❑Definición precisa de $\models$ dentro del lenguaje formal
- ❑Desarrollo de métodos semánticos de prueba que determinen si una conclusión concreta puede obtenerse realmente a partir de las premisas dadas
- ❑Creación de un cálculo deductivo con el que derivar todas las conclusiones que pueden obtenerse a partir de unas premisas dadas
- ❑Conocimiento de las propiedades del cálculo deductivo así construido, en particular de su validez, consistencia y completud

Ejercicios

Formalizar (de diversas formas) y razonar (de diversos modos) la validez o invalidez de los siguientes argumentos:

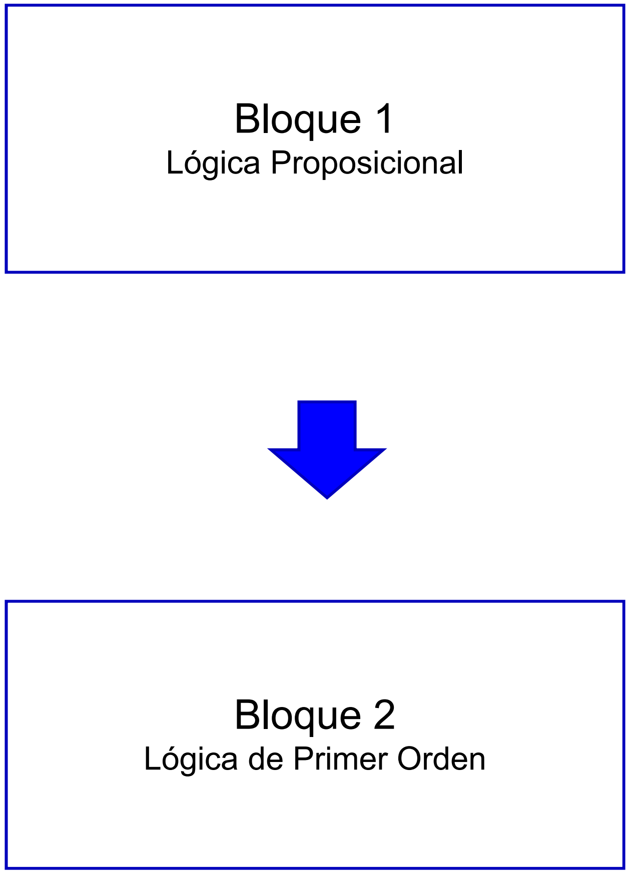
1. Siempre que canto, llueve. Hoy no cantaré. Luego hoy no lloverá. Inválida
2. Llegaré pronto si cojo un taxi. Llegué tarde. Luego no cogí un taxi. Válida
3. Basta con pulsar para avisar. Hay un aviso. Luego se ha pulsado. Inválida
4. Es necesario dormir para roncar. Oigo ronquidos. Luego alguien duerme. Válida
5. Bebo vino o cerveza. No bebo vino. Luego bebo cerveza. Válida
6. Llego en tren o en autobús. Llego en tren. Luego no llego en autobús. Inválida
7. Hay una persona rica e inteligente. Juan es inteligente. Luego Juan es rico. Inválida
8. Todos los metales son conductores. Todos los conductores calculan distancias. Todos los metales calculan distancias. Válida

Lógica
Tema 1: Lenguajes proposicionales y formalización

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Asignatura


Bloque 1
Lógica Proposicional
Bloque 2
Lógica de Primer Orden

Temas LP

❑ Bloque I

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Lógica

Lenguajes proposicionales: sintaxis

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Problemas con el lenguaje natural

- Normalmente nos expresamos con un lenguaje natural que nos resulta cercano, intuitivo y sencillo.
- Sin embargo, una oración puede ser defectuosa a 3 niveles:
  - Sintáctico: *A este oración les fallar varias cosa*
  - Semántico: *Aristóteles es impar*
  - Pragmático: *¿Me da un libro sobre cómo hacer amigos, carahuevo?*
- Así que, hay 3 niveles de análisis de un lenguaje:
  - Sintáctico: Centrado en la *estructura formal* de las oraciones
  - Semántico: Centrado en las *condiciones de verdad* de las oraciones
  - Pragmático: Centrado en los efectos del *contexto* sobre las oraciones
- En lógica, sólo nos va a interesar la sintaxis y la semántica. Dentro de la semántica, sólo nos interesa la parte formal, i.e. el modo en que la disposición de los elementos afecta a los valores de verdad:

  Sólo David ama a Bea ≠ David ama sólo a Bea

Lenguajes naturales vs. lenguajes formales

- Por tanto, vamos a utilizar un lenguaje artificial que evite los problemas anteriores a nivel sintáctico y semántico relacionados con la parte estructural de las oraciones.

- Es decir, en el contexto de la lógica formal se exige algo que sea:
  - sintácticamente preciso y no ambiguo
  - con un significado (*semántica*) unívoco, y no que una palabra pueda significar cosas distintas según algún tipo de contexto
  - cuya definición sea muy compacta (aprovechando que tiene un ámbito muy delimitado: los *hechos lógicos*)

Definiendo un lenguaje

Todo lenguaje necesita:

- Un alfabeto, i.e. un conjunto de elementos primitivos desde los que construir las expresiones del lenguaje
  - el alfabeto latino no es el mismo que el ruso
- Un conjunto de reglas de combinación de los elementos primitivos que determinen qué secuencias de esos elementos definen expresiones correctas del lenguaje
  - el inglés y el español comparten alfabeto pero no admiten las mismas combinaciones

Lenguaje proposicional: Proposiciones

- Las proposiciones son los elementos primitivos que utiliza un lenguaje proposicional para representar razonamientos

- Las proposiciones representan hechos lógicos, es decir, enunciados por los que tiene sentido preguntarse si son verdaderos o falsos.

  - Ejemplos:
    - *1 = 0* SI
    - *Mañana lloverá* SI
    - *Haz los ejercicios de lógica* NO
    - *Alex hace los ejercicios de lógica* SI
    - *¿Vas hoy al cine?* NO

Lenguaje proposicional: Proposiciones

- Los enunciados más sencillos son los que no dependen de otros:
  - *llueve*
  - *Nadal ganó el US Open 2013*

- Los símbolos de proposición representan este tipo de hechos:
  - **p** puede representar "*llueve*"
  - **q** puede representar "*Nadal ganó el US Open 2013*"

- Para enunciados más complejos necesitamos otros símbolos que representen la relación entre los más sencillos que los componen:
  - *llueve o nieva*
  - si **p** representa "*llueve*" y **r** representa "*nieva*", necesitamos poder representar la disyunción "**p** o **r**"

Lenguaje proposicional: Sintaxis

- (L_0, LP) Lenguaje proposicional (de orden cero, de enunciados): lenguaje formal que consta de un alfabeto y de reglas de formación de fórmulas

- Alfabeto de un lenguaje proposicional:
  - símbolos de proposición: **p, q, r… p1, p2…**
  - conectivas lógicas: **¬** (negación)**,** ∨ (disyunción)**,** ∧ (conjunción)**,** → (implicación, condicional)**,** ↔ (doble implicación, bicondicional)
  - símbolos auxiliares: **(,)**

- Reglas de formación de fórmulas: Determinan cuáles de todas las posibles secuencias (finitas) de símbolos de un alfabeto se consideran fórmulas correctas *(fórmulas bien formadas)*

Lenguaje proposicional: Sintaxis

Fórmula bien formada (FBF):

- Si **A** es un símbolo de proposición, **A** es una FBF *(fórmula atómica, átomo)*
- Si **A** es una FBF, **¬A** es una FBF
- Si **A** y **B** son FBFs:

  (A ∧ B)   (A ∨ B)   (A → B)   (A ↔ B)

  son FBFs

Por ejemplo, dado el conjunto de símbolos de proposición {p, q, r}:

- p, q y r son FBF
- ¬p, ¬q y ¬r son FBF
- (¬p ∧ q), (r ∨ p), (¬q → ¬r), (p ↔ ¬p), … son FBF
- (¬p ∧ (r ∨ p)), ((¬q → ¬r) ∨ p), (¬q → (p ↔ ¬p)), … son FBF
- ………

Lenguaje proposicional: Sintaxis

- Los símbolos A y B utilizados en la definición de FBF <u>no</u> son proposiciones sino *metavariables*
  - representan fórmulas cualesquiera del lenguaje
  - nos permiten razonar sobre conjuntos (infinitos) de fórmulas que comparten una misma forma lógica

    por ejemplo: **$(A \wedge \neg A)$** representa a

    - $(p \wedge \neg p)$, $(q \wedge \neg q)$, $(r \wedge \neg r)$, …
    - $((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q))$, $((r \vee s) \wedge \neg(r \vee s))$, …
    - $((p \vee (q \rightarrow r)) \wedge \neg(p \vee (q \rightarrow r)))$, $((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg(p \leftrightarrow (q \wedge r)))$, …
    - ………………

Lenguaje proposicional: Sintaxis

Uso de los paréntesis

- El uso excesivo de paréntesis puede complicar o hacer farragosa la lectura de una fórmula:

$$(((q \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \rightarrow p) \wedge (((\neg r \wedge \neg q) \rightarrow p) \vee (q \wedge p)))$$

- Se pueden hacer algunas simplificaciones:
  - pueden eliminarse siempre los paréntesis más externos a una fórmula

    $(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r)$, $\quad (\neg(p \rightarrow q) \vee r) \equiv \neg(p \rightarrow q) \vee r$

  - pueden eliminarse siempre los paréntesis internos *no precedidos de negación* en secuencias compuestas *totalmente* por conjunciones o *totalmente* por disyunciones

    $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$

    pero $\quad p \wedge \neg(q \wedge r) \not\equiv p \wedge \neg q \wedge r$!!

    $((\neg p \vee q) \vee r) \equiv (\neg p \vee q) \vee r \equiv \neg p \vee q \vee r$

    pero $\quad \neg(p \vee q) \vee r \not\equiv \neg p \vee q \vee r$!!

(≡ se entiende como “es equivalente a”)

Lenguaje proposicional: Sintaxis

Uso de un orden de precedencia entre las conectivas

- permite simplificar aún mas la escritura de fórmulas, eliminando más paréntesis:

$\neg$	mayor precedencia que	$\wedge$ y $\vee$
$\wedge$ y $\vee$	mayor precedencia que	$\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

  - $p \rightarrow (\neg q \wedge r) \equiv p \rightarrow \neg q \wedge r$
  - $(q \vee p) \rightarrow (\neg q \wedge r) \equiv q \vee p \rightarrow \neg q \wedge r$

- una secuencia de fórmulas compuesta por conectivas del mismo nivel de precedencia se agrupa por la derecha

  - $p \wedge q \vee r \equiv p \wedge (q \vee r)$
  - $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \equiv p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$
  - $q \wedge \neg p \vee q \wedge \neg r \equiv q \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

Lenguaje proposicional: Sintaxis

- Acabamos de ver que
  - $p \rightarrow \neg q \wedge r$ es lo mismo que $(p \rightarrow (\neg q \wedge r))$
  - $p \wedge q \vee r$ es lo mismo que $(p \wedge (q \vee r))$
  - $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$ es lo mismo que $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$
  - $q \wedge \neg p \vee q \wedge \neg r \rightarrow p$ es lo mismo que $((q \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \rightarrow p)$

- En los ejemplos anteriores los paréntesis no son necesarios, pero si queremos dar otro "significado" a las fórmulas entonces sí lo son:
  - $p \rightarrow \neg q \wedge r$ entendida como $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$
  - $p \wedge q \vee r$ entendida como $(p \wedge q) \vee r$
  - $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$ entendida como $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
  - $q \wedge \neg p \vee q \wedge \neg r \rightarrow p$ entendida como $q \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow p)$

☞*si no se tiene claro si poner o no paréntesis, mejor ponerlos!!!!*

Ejercicios: ¿cuáles son fórmulas?

Identifica cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas teniendo en cuenta las simplificaciones descritas sobre el uso de los paréntesis y el orden de precedencia de las conectivas:

1.	$(\neg(p \rightarrow \neg q)$	NO
2.	$(p \rightarrow q) \vee \neg p \rightarrow q)$	NO
3.	$((q \rightarrow (r \vee \neg s)) \rightarrow (\neg\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg r$	SI
4.	$\neg(s \rightarrow (p \wedge q\neg))$	NO
5.	$\neg(p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(r \rightarrow(\neg s \rightarrow t))))$	SI
6.	$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$	SI
7.	$(\neg q \vee (r \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow (q \rightarrow (\neg r \vee (p \leftrightarrow \neg q)))$	NO
8.	$(((\neg q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee q)$	SI
9.	$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow\neg s) \rightarrow t))))$	NO

Fórmulas proposicionales: Estructura

- Cada fórmula se construye de una única forma a partir de los símbolos de proposición y las conectivas
- La última conectiva introducida será la conectiva dominante (o principal) de la fórmula
- Es importante distinguirla porque determina la estructura lógica de la fórmula y es a la que habrá que atender para establecer el valor de verdad de la fórmula

$p \leftrightarrow (r \rightarrow s)$	$\leftrightarrow$
$\neg(p \rightarrow (q \vee r))$	$\neg$
$\neg p \vee (p \wedge (p \rightarrow p))$	$\vee$
$\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$	primer $\neg$
$(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q) \wedge p$	segundo $\wedge$
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \vee \neg(p \vee q)$	$\vee$

Ejercicios: conectiva dominante

Identifica la conectiva dominante en las siguientes fórmulas:

1. $\neg(p \to \neg q)$
2. $(p \to q) \lor (\neg p \to q)$
3. $((q \to (r \lor \neg s)) \to (\neg\neg p \land q)) \leftrightarrow \neg r$
4. $\neg(s \to (p \land q))$
5. $(p \to (\neg q \to \neg(r \to(\neg s \to t))))$
6. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$
7. $(\neg q \lor (r \to (\neg p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow q) \to (\neg r \lor (p \leftrightarrow \neg q))$
8. $(((\neg q \lor r) \to \neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow \neg(q \to r)) \lor ((p \land \neg q) \lor q)$
9. $\neg((((p \to \neg q) \to \neg r) \to\neg s) \to t)$
10. $(((p \lor q \lor \neg r) \to (\neg q \land \neg p)) \land (p \lor \neg s)) \to (\neg p \land q \land r)$
11. $(p \land q) \lor ((\neg p \land (r \to p)) \lor q)$
12. $(((p \to (q \lor \neg r)) \to (\neg q \lor s)) \leftrightarrow (s \leftrightarrow \neg p)) \lor (p \land q)$
13. $(p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor q \lor r)$
14. $(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg q)$

1. primer $\neg$
2. $\lor$
3. $\leftrightarrow$
4. $\neg$
5. primer $\to$
6. primer $\neg$
7. segundo $\to$
8. segundo $\lor$
9. primer $\neg$
10. segundo $\to$
11. primer $\lor$
12. tercer $\lor$
13. cualquier $\land$
14. cualquier $\lor$

Departamento de Inteligencia Artificial

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Lógica

Formalización con lenguajes proposicionales

Formalización de enunciados

- Objetivo general: Representar en un lenguaje formal la **forma lógica** de una argumentación

- Recuerda: formalizamos oraciones declarativas, que afirman o niegan algo

- Para lenguajes proposicionales eso significa:
  - Identificar las proposiciones y unificar las diferencias lingüísticas cuando el significado es el mismo
  - Determinar las relaciones lógicas entre proposiciones (mediante conectivas)

Cómo formalizar el lenguaje natural: proposiciones

- Con frecuencia hay que considerar equivalentes oraciones con distintos tiempos verbales:
  - Alex canta ≡ Alex cantará ≡ Alex cantaría
  - Alex copia a Jorge ≡ Jorge es copiado por Alex

- A veces hay que desechar ciertos elementos irrelevantes:
  - Javier discute acaloradamente. Si Javier discute, le sube la tensión
  - p ≡ Javier discute, q ≡ a Javier le sube la tensión

Cómo formalizar el lenguaje natural: proposiciones

- Hay que fijarse en qué palabras se refieren al mismo objeto, como los pronombres:
  - Picasso nació en Málaga. Si <u>él</u> nació <u>allí</u>, no lo hizo en Salamanca
  - p ≡ Picasso nació en Málaga, q ≡ Picasso nació en Salamanca

- Hay que fijarse en sinónimos y antónimos:
  - David es inocente. Si no es culpable, debe ser absuelto
  - Sólo necesitamos 2 proposiciones:
    - p ≡ David es inocente ≡ David no es culpable,
    - q ≡ David debe ser absuelto

Algunas formalizaciones sencillas

Alex canta ≡ p,   David baila ≡ q,   Javier da palmas ≡ r

- Alex canta o David baila o Javier da palmas — $p \vee q \vee r$
- Alex canta y David baila y Javier da palmas — $p \wedge q \wedge r$
- Alex canta, o David baila y Javier da palmas — $p \vee (q \wedge r)$
- Alex canta o David baila, y Javier da palmas — $(p \vee q) \wedge r$
- Si Alex canta, David baila — $p \rightarrow q$
- Si Alex canta y David baila, Javier da palmas — $(p \wedge q) \rightarrow r$
- Alex canta y, si David baila, Javier da palmas — $p \wedge (q \rightarrow r)$
- Alex canta si y sólo si David baila — $p \leftrightarrow q$
- Alex no canta si y sólo si Javier no da palmas — $\neg p \leftrightarrow \neg r$
- Si Alex canta, entonces David baila si Javier no da palmas — $p \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$
- Alex canta, si y sólo si, David no baila si Javier da palmas — $p \leftrightarrow (r \rightarrow \neg q)$

Cómo formalizar el lenguaje natural: relaciones lógicas

Expresiones equivalentes a **Y**

- Alex habla Y David duerme
- Alex habla, PERO David duerme
- Alex habla, AUNQUE David duerme
- Alex habla, SIN EMBARGO, David duerme
- Alex habla, David duerme
- A PESAR DE QUE Alex habla, David duerme

$$p \wedge q$$

Cómo formalizar el lenguaje natural: relaciones lógicas

Expresiones equivalentes a **O**

- Alex habla O David duerme
- Alex habla Y/O David duerme
- Alex habla, O BIEN David duerme
- Alex habla, A MENOS QUE David duerma
- Alex habla, A NO SER QUE David duerma

$$p \vee q$$

Cómo formalizar el lenguaje natural: relaciones lógicas

Expresiones equivalentes a **NO**

- Alex NO habla
- NO ES EL CASO QUE Alex hable
- NO ES CIERTO QUE Alex hable
- Alex NUNCA habla

$$\neg p$$

Cómo formalizar el lenguaje natural: relaciones lógicas

Expresiones equivalentes a **SI Y SÓLO SI**

- Alex habla SI Y SÓLO SI David duerme
- Que Alex hable ES NECESARIO Y SUFICIENTE PARA que David duerma
- Que Alex hable EQUIVALE A que David duerma

$$p \leftrightarrow q$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

27

Cómo formalizar el lenguaje natural: relaciones lógicas

Expresiones equivalentes a **SI … (ENTONCES)**

- SI Alex habla, (ENTONCES) David duerme
- CUANDO Alex habla, David duerme
- David duerme, SIEMPRE QUE Alex habla
- BASTA que Alex hable PARA que David duerma
- Que Alex hable ES SUFICIENTE PARA que David duerma
- ES NECESARIO que David duerma PARA que Alex hable
- David no duerme A MENOS QUE Alex hable

$$p \rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Cómo formalizar el lenguaje natural

Necesario / Suficiente

Compara dos asignaturas:

- A1: Es suficiente sacar un 9 (p) para tener MH (q)
- A2: Es necesario sacar un 9 (p) para tener MH (q)

Suponiendo que sueles sacar 9, ¿cuál te da más facilidades para tener MH?

- En A1, si sacas un 9 tienes MH; pero en A2 sacar un 9 no implica tener MH (puede que haya requisitos adicionales)

$$p \rightarrow q$$

- En A2 si no sacas un 9, no tienes MH. Por tanto, si tienes MH en A2 es porque has sacado un 9

$$q \rightarrow p$$

Cómo formalizar el lenguaje natural

Necesario / Suficiente

Por tanto, si nos encontramos una estructura de frase:

- A es suficiente para B ➡ $A \rightarrow B$

- A es necesario para B ➡ $B \rightarrow A$

Cómo formalizar el lenguaje natural

Caso peculiar: SÓLO SI

- Me mareo si voy en coche

  Que vaya en coche es condición *suficiente* para que me maree (aunque podría marearme también por otras razones)

  p ≡ me mareo, q ≡ voy en coche $q \to p$

- Me mareo sólo si voy en coche

  Que vaya en coche es condición *necesaria* para que me maree (si no voy en coche no me mareo)

  p ≡ me mareo, q ≡ voy en coche $p \to q$

- "Si" marca el antecedente de la implicación: Si F, G ≡ $F \to G$
- "Sólo si" marca el consecuente de la implicación: Sólo si F, G ≡ $G \to F$

Cómo formalizar el lenguaje natural

Caso peculiar: Imperativo + y

Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo

- Opción 1: desechar el imperativo

  p ≡ levantar el mundo p

  ¿se limita Arquímedes a afirmar que va a levantar el mundo?

- Opción 2: considerar la "y" una conjunción

  p ≡ dar un punto de apoyo, q ≡ levantar el mundo $p \land q$

  ¿afirma entonces Arquímedes que le damos un punto de apoyo?

- Opción 3: Arquímedes establece una condición. SI le damos un punto de apoyo, él levantará el mundo

  correcta!

  p ≡ dar un punto de apoyo, q ≡ levantar el mundo $p \rightarrow q$

Cómo formalizar el lenguaje natural

Caso peculiar: Imperativo + o

1) Dame un vaso de agua o me muero
2) Dame un vaso de agua o una gaseosa

¿tienen la misma forma lógica?

- 1) establece una condición que, en caso de no cumplirse, provoca una consecuencia

  p ≡ me das un vaso de agua, q ≡ me muero $\neg p \to q$

- 2) es una disyunción de dos imperativos y no se puede formalizar

Formalización

$\neg F$	"no F", "no es cierto que F", "no es verdad que F", "no es el caso que F", "nunca F", "jamás F"
$F \wedge G$	"F y G", "F, pero G", "F, sin embargo G", "F, aunque G", "F, además de G", "A pesar de F, G"
$F \vee G$	"F o G", "F y/o G", "F o bien G", "F a no ser que G", "F a menos que G", "F excepto G"
$F \rightarrow G$	"si F entonces G", "si F, G", " cuando F, G", "G si F", "G siempre que F", "F sólo si G" "sólo F si G", "no F a menos que G", "F es (condición) suficiente para G", "G es (condición) necesaria para F", "F sólo y únicamente si G", "G es la causa de F", "la causa de F es G"
$F \leftrightarrow G$	"F si y sólo si G", "F es necesario y suficiente para G", "F equivale a G", "F sólo y siempre que G"

Cómo formalizar el lenguaje natural

Últimos consejos:

- Lo fundamental en los casos que plantean "dudas razonables" es aplicar el sentido común y mantener un criterio homogéneo.

- Hay que tener mucho cuidado en no añadir nada que no venga realmente dado en la oración.

- La lógica proposicional no permite muchas florituras: lo fundamental es mantener la forma lógica con las conectivas y evitar ambigüedades.

- La formalización tiene un poco de arte y, como tal, requiere (mucha) práctica.

Ejercicios

Formalización: un ejemplo

Si te tiras de un avión .... <u>te matas</u> a menos que <u>lleves paracaídas</u>

p q

Formalizaciones correctas y equivalentes:

✓o te pones un paracaídas o te matas $q \vee p$

✓como no te pongas un paracaídas, te matas $\neg q \to p$

✓si no te has matado, es que llevabas paracaídas $\neg p \to q$

(más adelante veremos que estas tres fórmulas son <u>lógicamente equivalentes</u>)

Formalizaciones incorrectas:

✗ $p \to \neg q$ si resulta que te has matado, ¿necesariamente tiene que ser porque no llevabas paracaídas?

✗ $q \to \neg p$ si llevas paracaídas, ¿puedo asegurar que no te vas a matar?

Formalización de enunciados 1

Cuando el ventero está en la puerta, el diablo está en la venta; pero aunque no esté en la puerta, el diablo sigue estando en la venta.

$p \equiv$ el ventero está en la puerta

$q \equiv$ el diablo está en la venta

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$$

Formalización de enunciados 2

Supongamos que vamos a hablar de una figura que sólo puede ser cuadrada o triangular, pequeña o grande, y roja o azul.

$p \equiv$ es pequeña	$q \equiv$ es cuadrada	$r \equiv$ es roja
$s \equiv$ es grande	$t \equiv$ es triangular	$u \equiv$ es azul

Interpretaremos las expresiones del tipo ‘X es un cuadrado azul’ como ‘X es un cuadrado’ y ‘X es azul’.

Formalización de enunciados 2 (cont.)

Si es grande, también es azul; es un triángulo azul o es roja y pequeña; si es roja, no es un cuadrado pequeño; si es triángulo, es rojo y pequeño.

$p \equiv$ es pequeña	$q \equiv$ es cuadrada	$r \equiv$ es roja
$s \equiv$ es grande	$t \equiv$ es triangular	$u \equiv$ es azul

$$(s \rightarrow u)\ ;\ (t \wedge u) \vee (r \wedge p)\ ;\ r \rightarrow \neg(q \wedge p)\ ;\ t \rightarrow (r \wedge p)$$

Podemos sustituir los “;” por conjunciones y obtener así una sola fórmula compleja:

$$(s \rightarrow u) \wedge ((t \wedge u) \vee (r \wedge p)) \wedge (r \rightarrow \neg(q \wedge p)) \wedge (t \rightarrow (r \wedge p))$$

Formalización de enunciados 2 (cont.)

$p \equiv$ es pequeña　　$q \equiv$ es cuadrada　　$r \equiv$ es roja

$s \equiv$ es grande　　$t \equiv$ es triangular　　$u \equiv$ es azul

- Si es un cuadrado pequeño, es rojo; ni es un cuadrado grande ni es un cuadrado rojo; es un triángulo sólo si es rojo.

$$(q \land p \rightarrow r) \land (\neg(q \land s) \land \neg(q \land r)) \land (t \rightarrow r)$$

- No es un cuadrado grande; no es un triángulo azul; es roja si y sólo si es pequeña

$$\neg(q \land s) \land \neg(t \land u) \land (r \leftrightarrow p)$$

- Si es un cuadrado o es roja, es grande; es grande si y sólo si es azul; sólo es un cuadrado si es roja

$$((q \lor r) \rightarrow s) \land (s \leftrightarrow u) \land (q \rightarrow r)$$

Formalización de argumentos 3

Aprobaré lógica, si Dios quiere. Aprobaré lógica si y sólo si estudio y hago todos los ejercicios. Sin embargo, no he hecho los ejercicios. Por tanto, Dios no quiere que apruebe lógica.

$p \equiv$ apruebo lógica

$q \equiv$ Dios quiere que apruebe

$r \equiv$ estudio

$s \equiv$ hago los ejercicios

Este texto es un razonamiento. ¿Cómo marcar que la conclusión comienza después de ese "por tanto"?

Con el símbolo $\therefore$

$$(q \to p) \wedge (p \leftrightarrow r \wedge s) \wedge \neg s$$

$$\therefore \neg q$$

Formalización de argumentos 4

Si la señora White lo hizo, tuvo que ser con la llave inglesa o con la cuerda. Pero usó la cuerda si y sólo si el asesinato se cometió en el vestíbulo. El asesinato se cometió en la cocina. Por lo tanto, si la señora White lo hizo, fue con la llave inglesa.

$p \equiv$ White lo hizo

$q \equiv$ White lo hizo con la llave inglesa

$r \equiv$ White lo hizo con la cuerda

$s \equiv$ asesinato en el vestíbulo

$t \equiv$ asesinato en la cocina

$$(p \to q \lor r) \land (r \leftrightarrow s) \land t$$

$$\therefore\ p \to q$$

Formalización de argumentos 5

Una condición necesaria para que la humanidad sea libre es que los seres humanos no estén ligados a una esencia. Si Dios creó a los humanos, entonces estamos ligados a una esencia. Claramente, los humanos somos libres. Por tanto, Dios no creó a los humanos.

$p \equiv$ los humanos son libres

$q \equiv$ los humanos están ligados a una esencia

$r \equiv$ Dios creó a los humanos

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge p$$

$$\therefore \neg r$$

Formalización de argumentos 6

No hay vida en Marte a menos que haya oxígeno allí, y no hay oxígeno allí a menos que haya allí alguna planta, y no hay plantas allí a menos que haya agua. Por tanto, si hay vida en Marte, allí hay agua.

$p \equiv$ hay vida en Marte

$q \equiv$ hay oxígeno en Marte

$r \equiv$ hay plantas en Marte

$s \equiv$ hay agua en Marte

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$$
$$\therefore (p \rightarrow s)$$

Formalizaciones equivalentes:

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q) \wedge (\neg s \rightarrow \neg r)$$
$$\therefore (p \rightarrow s)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)$$
$$\therefore (p \rightarrow s)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Lógica
Tema 2: Semántica formal

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Temas LP

❑ Bloque I

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

¿Qué es la semántica?

- Estudia el **significado de los símbolos**, por lo que se introduce el concepto de **interpretación** (*conjunto de reglas precisas que permiten asignar objetos de un dominio a ciertas expresiones de un lenguaje formal*).

- **Asigna un significado a las construcciones sintácticas**. Junto con la sintáctica ayuda a definir un **sistema formal**.

¿Qué es la semántica?

- Sin significado todas las formulas proposicionales son sintácticamente diferentes unas de otras, excepto si son la misma cadena de símbolos.

- La introducción de la *semántica* a las fórmulas proposicionales consiste en reducir todas las situaciones posibles a dos: cierto o **verdadero** y **falso**.

- Aparece entonces una **relación de equivalencia entre fórmulas** que permiten identificar fórmulas equivalentes.

Introducción a la semántica proposicional

- Proposición: Una condición/afirmación posible del mundo sobre el que queremos decir algo

- Una proposición puede ser **V**erdadera o **F**alsa (*valor de verdad*)

- Proposiciones *simples*:
  - su valor de verdad no depende de otra proposición

- FBF proposicionales *compuestas*:
  - su valor de verdad depende del que tengan las proposiciones simples que la definan y
  - del significado de las conectivas

Interpretación de FBFs proposicionales

Interpretación: **i**(FBF proposicional) = V / F

- Interpretar una fórmula significa asignarle un valor de verdad

- Esto se hace mediante una función de interpretación (i) (también llamada valoración o interpretación), que es un dispositivo formal para asignar un valor de verdad a todas y cada una de las FBFs de un lenguaje proposicional

  LP es un lenguaje proposicional, $\boxed{\mathbf{i: FBF_{LP} \Rightarrow \{V,F\}}}$

- Se comienza asignando V o F a las proposiciones del lenguaje, y a partir de ahí, se determina si la fórmula del lenguaje es V o F considerando el significado de las conectivas (que es fijo)

- Por tanto, el número de interpretaciones (o modos de interpretar) de una fórmula con N proposiciones es 2^N

Significado de las conectivas

Un líder político hace las siguientes afirmaciones:

1. "**No** subiré el impuesto de la renta"
2. "Bajaré el IVA del tabaco **y** el alcohol"
3. "Aprobaré el cheque bebé **o** una rebaja en las guarderías"
4. "Pararemos las obras del AVE **sí y sólo si** el Parlamento lo aprueba"

¿Cuándo podremos decir que ha mentido?

- ❑ Cuando observemos que sí ha subido el impuesto de la renta
- ❑ Cuando <u>alguna de las dos</u> promesas no se cumpla
- ❑ Cuando <u>ninguna de las dos</u> promesas se cumple
- ❑ Cuando una de las dos afirmaciones se cumpla y la otra no

Significado de las conectivas

Otra promesa del mismo político: "**Si** sube la vivienda, bajaré el IBI"

Consideremos 4 situaciones:

1. Sube la vivienda y baja el IBI
2. No sube la vivienda, pero baja el IBI
3. Sube la vivienda y no baja el IBI
4. No sube la vivienda ni baja el IBI

¿Cuándo podremos decir que ha mentido? ***Solamente en la 3***

- ❑La promesa es un condicional que dice qué acciones se tomarán si se cumple el antecedente
- ❑Pero no dice nada acerca de lo que se hará cuando el antecedente no se cumple
- ❑Sólo resulta ser falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso

Interpretación de FBFs proposicionales

Significado de las conectivas:

- ***i(¬A) = V*** *sii i(A) = F;* ***i(¬A) = F*** *sii i(A) = V*
- ***i(A ∧ B) = V*** *sii i(A) = V* y *i(B) = V;* ***i(A ∧ B) = F*** *sii i(A) = F* o *i(B) = F*
- ***i(A ∨ B) = V*** *sii i(A) = V* o *i(B) = V;* ***i(A ∨ B) = F*** *sii i(A) = F* y *i(B) = F*
- ***i(A → B) = V*** *sii i(A) = F* o *i(B) = V;* ***i(A → B) = F*** *sii i(A) = V* y *i(B) = F*
- ***i(A ↔ B) = V*** *sii i(A) = i(B);* ***i(A ↔ B) = F*** *sii i(A) ≠ i(B);*

siendo A y B FBFs de un lenguaje proposicional

- Representación con tabla de verdad:
  - Las Tablas de verdad muestran todos los posibles valores de verdad que una fórmula proposicional puede tomar.

$i(A)$	$i(B)$	$i(\neg A)$	$i(A \wedge B)$	$i(A \vee B)$	$i(A \rightarrow B)$	$i(A \leftrightarrow B)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Valores y funciones de verdad

- **Símbolos de la lógica proposicional semántica.**
  - **Constantes proposicionales**: conectivas o conectores.
    - Negador.
      - Se representa por el símbolo ¬.
      - Produce fórmulas del tipo "¬p" ≡ "no es cierto que p", "no es p", …..
      - El negador es la conectiva que invierte el valor de verdad de una proposición.
      - Su tabla de verdad es:

p	¬
V	F
F	V

    - Conjuntor.
      - Se representa por el símbolo ^.
      - Produce fórmulas del tipo "p^q" ≡ "p y q".
      - El conjuntor es la conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas solamente cuando son verdaderas las dos proposiciones que las componen.
      - Su tabla de verdad es:

p	q	p ^ q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Valores y funciones de verdad

❑ Símbolos de la lógica proposicional semántica.

- **Constantes proposicionales**: conectivas o conectores.

  - Disyuntor.
    - Se representa por el símbolo $\vee$.
    - Produce fórmulas del tipo "$p \vee q$" ≡ "p o q".
    - El disyuntor da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas cuando una de las proposiciones que las componen es verdadera.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

  - Condicional o implicador
    - Se representa por el símbolo $\rightarrow$.
    - Produce fórmulas del tipo "$p \rightarrow q$" ≡ "si p entonces q", "cuando p entonces q".
    - El implicador es una concectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas en todos los casos menos cuando siendo verdadero el antecedente, es falso el cosecuente.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Valores y funciones de verdad

❑ Símbolos de la lógica proposicional semántica.

- **Constantes proposicionales:** conectivas o conectores.
  - <u>Bicondicional o coimplicador</u>
    - Se representa por el símbolo ↔.
    - Produce fórmulas del tipo "p ↔ q" ≡ "p coimplica a q", "si y solo si p entonces q", "únicamente si p entonces q".
    - El coimplicador es una concectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas cuando coinciden los valores de verdad de las proposiciones que las componen.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	p↔q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Asignación de significado a una fórmula

Vamos a asignar un valor de verdad a la fórmula siguiente para la interpretación i(p) = i(q) = V y i(r) = F

$$p \wedge (\neg q \vee \neg r) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow r)$$

F V V V

V V F F

V V

V

- $i(\neg q \vee \neg r) = V$, por tanto $i(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) = V$
- $i(\neg(p \vee q)) = F$, por tanto $i(\neg(p \vee q) \rightarrow r) = V$
- $i(p \wedge (\neg q \vee \neg r) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow r)) = V$

(¡recuerda la precedencia de operadores y la conectiva principal!)

Tabla de verdad de una fórmula

- Tabla de verdad de la fórmula $p \vee \neg q \rightarrow p$

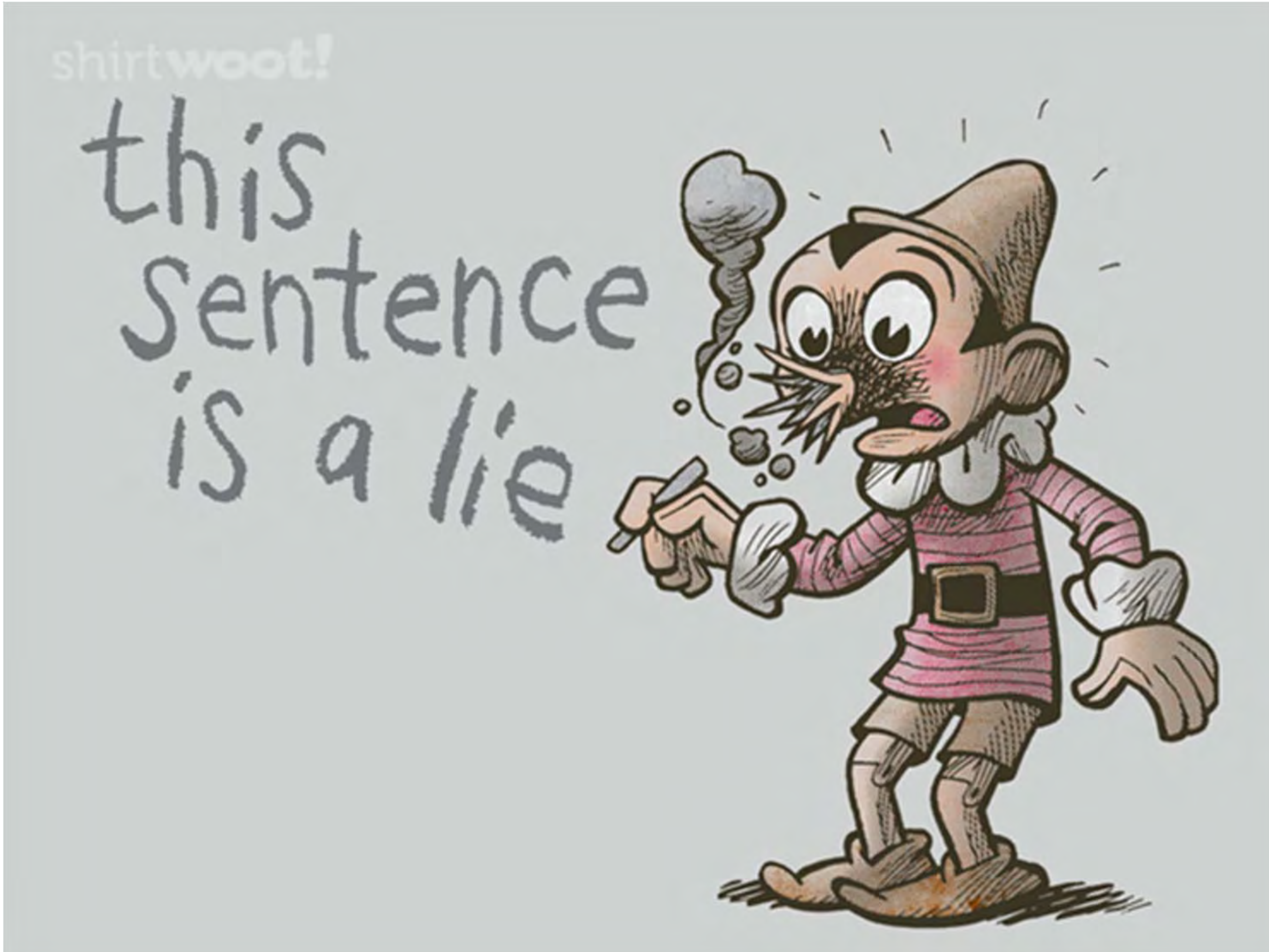
p	q	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

- Las dos primeras columnas representan todas las situaciones posibles en las que se pueden encontrar las proposiciones que componen la fórmula, es decir, todas las posibles interpretaciones de la fórmula.

- Que la fórmula sea verdadera en todas, algunas o ninguna de ellas, la clasifica automáticamente, como veremos a continuación.

- (Siempre termina en un número finito de pasos: truth table generator)

La paradoja del mentiroso (divulgación)



https://en.wikipedia.org/wiki/Liar_paradox

Ejercicios de semántica proposicional I

- Asignar significado a las siguientes fórmulas cuando i(p) = i(q)= V y i(r) = F

  1. $(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg r)$
  2. $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \wedge (r \rightarrow \neg(p \vee q))$

- Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación:

  1. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  2. $(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$
  3. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

Lógica
Tema 3: Razonamiento semántico

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Temas LP

❑ Bloque I

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Introducción a la semántica proposicional

Hemos visto (informalmente) qué es un razonamiento válido:

- siempre que las premisas del razonamiento sean ciertas, necesariamente la conclusión ha de serlo también
- la verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la conclusión
- la conclusión es *consecuencia lógica* de las premisas

Objetivos del tema:

- Definir con precisión el concepto de consecuencia lógica
- Definir dos métodos con los que determinar si un razonamiento dado es válido o no
  - (y dos métodos más opcionales)

Validez

Atendiendo a su semántica, una FBF puede clasificarse como:

- **Válida** (o tautología) sii no existe una interpretación i tal que i(A) = F (se representa **⊨ A**)
- **Contradicción** sii no existe una interpretación i tal que i(A) = V
- **Contingente** sii existe alguna interpretación i tal que i(A) = V y existe alguna interpretación i tal que i(A) = F

- Una fórmula A es válida sii ¬A es una contradicción
- Una fórmula A es contingente sii ¬A es contingente

- Ejemplos simples: $(p \vee \neg p)$ es una tautología, su negación $(\neg p \wedge p)$ una contradicción. Y p es una FBF contingente, al igual que $(\neg p)$
- Otra tautología: $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Satisfacibilidad

Dado un lenguaje proposicional LP:

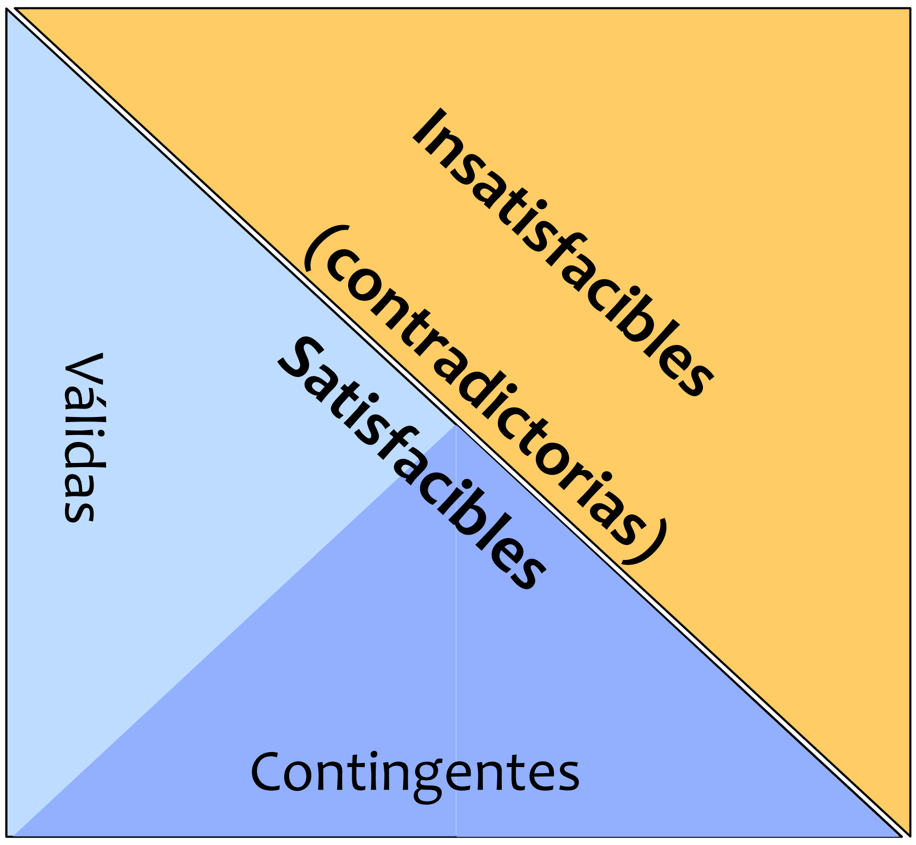
- Una interpretación i **satisface** una fórmula $A \in FBF_{LP}$ sii $i(A) = V$
- Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **satisfacible** sii *existe (al menos) una* interpretación i tal que $i(A) = V$
- Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **insatisfacible** sii *no existe ninguna* interpretación i tal que $i(A) = V$
- Para conjuntos de fórmulas $\{A_1,\ldots,A_n\}$, $A_i \in FBF_{LP}$ para todo $i{:}1 \leq i \leq n$:

  Una interpretación i **satisface** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para *todo* $i{:}1 \leq i \leq n$

- Una interpretación que satisface una fórmula es un **modelo** de la fórmula
- Una interpretación que hace falsa una fórmula es un **contramodelo** de la fórmula

- Ejemplos simples: $(p \vee \neg p)$ es satisfacible, su negación $(\neg p \wedge p)$ es insatisfacible. Y p es una FBF satisfacible, al igual que $(\neg p)$. El conjunto de FBFs $\{(p \vee \neg p), (\neg p \wedge p)\}$ no es satisfacible.

Clasificación de fórmulas



Satisfacibilidad de una fórmula

- Retomamos el ejemplo anterior con la fórmula $p \vee \neg q \rightarrow p$

p	q	p V ¬q	p V ¬q → p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

- La fórmula es satisfacible, ya que tiene 3 interpretaciones que la hacen verdadera
- No es válida porque una de sus interpretaciones la hace falsa. Por tanto, es contingente.

Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas

- Veamos si el siguiente conjunto de fórmulas es satisfacible:

$$\{\, p \wedge q,\ \ \neg(q \vee r),\ \ r \rightarrow \neg p \,\}$$

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(q \vee r)$	$r \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

- El conjunto es insatisfacible porque no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a las tres fórmulas simultáneamente

Validez y satisfacibilidad

De las definiciones anteriores se pueden establecer las siguientes equivalencias:

- Una fórmula es válida sii
  - no tiene contramodelos sii
  - todas sus interpretaciones son modelos sii
  - todas sus interpretaciones la satisfacen
- Una fórmula es una contradicción sii
  - no tiene modelos sii
  - todas sus interpretaciones son contramodelos sii
  - es insatisfacible
- Una fórmula es contingente sii
  - tiene modelos y contramodelos

Consecuencia lógica $\models$: definición

Dado un lenguaje proposicional LP, un conjunto de fórmulas $\{A_1,\ldots,A_n\}$, $A_i \in FBF_{LP}$ para todo i:$1 \leq i \leq n$, y una fórmula $B \in FBF_{LP}$:

Consecuencia lógica:

B es consecuencia lógica de $\{A_1,\ldots,A_n\}$ ($\mathbf{[A_1,\ldots,A_n] \models B}$)

- sii toda interpretación que satisface $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisface B
- sii no existe ninguna interpretación que satisfaga $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y no satisfaga a B

o lo que es lo mismo:

- sii la fórmula $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ es válida ($\mathbf{\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B}$)
  - (todas las filas de su tabla de verdad son verdaderas)
- **(…o)** sii $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B)$ es contradictoria, es decir, sii A1∧…∧An∧ ¬ B es contradictoria.
  - (todas las ramas del árbol de verdad se cierran)

Consecuencia lógica

Argumento correcto:

- Un argumento con premisas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y conclusión B es correcto sii $[A_1,\ldots,A_n] \vDash B$

- Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:

  1) Ver si *todas* las interpretaciones que satisfacen $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisfacen B, o bien

  2) Ver que *no existe ninguna* interpretación que satisfaga $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y no satisfaga B

- El caso 1): requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición. En caso positivo, el argumento es correcto.
- El caso 2): podemos centrarnos en definir una interpretación **i** tal que $i(\{A_1,\ldots,A_n\}) = V$ y $i(B) = F$. Si existe, esa interpretación es un contramodelo del argumento y por tanto el argumento no es correcto.

- Ejemplos simples: $p \vDash p$, $\{p,q\} \vDash p$, $\{p,q\} \vDash (p \vee q)$, $p \nvDash \neg p$, $\{p,q\} \nvDash \neg p$.

Consecuencia lógica: Ejemplo I

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

todas las interpretaciones posibles

$$\{ p \rightarrow (q \rightarrow r), p \land q \} \vDash r$$

i(p)	i(q)	i(r)	i(q→ r)	i(p → (q→ r))	i(p ∧ q)	i((p → (q→ r)) ∧ (p ∧ q))
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

De todas las interpretaciones posibles, sólo una hace verdad a las dos premisas, y esa interpretaci
también hace verdad a la conclusión. Por tanto, sí hay relación de consecuencia lógica.

…pero si para el contramodelo, necesito que i(r)=F…, sobran al menos la mitad de las filas

Recordatorio, interpretaciones de una FBF

1. ***i(¬A) = V*** *sii i(A) = F;* ***i(¬A) = F*** *sii i(A) = V*
2. ***i(A ∧ B) = V*** *sii i(A) = V* y *i(B) = V;* ***i(A ∧ B) = F*** *sii i(A) = F* o *i(B) = F*
3. ***i(A ∨ B) = V*** *sii i(A) = V* o *i(B) = V;* ***i(A ∨ B) = F*** *sii i(A) = F* y *i(B) = F*
4. ***i(A → B) = V*** *sii i(A) = F* o *i(B) = V;* ***i(A → B) = F*** *sii i(A) = V* y *i(B) = F*
5. ***i(A ↔ B) = V*** *sii i(A) = i(B);* ***i(A ↔ B) = F*** *sii i(A) ≠ i(B);*

NOTAS:

- *Si concluyes que no hay consecuencia lógica (⊭)* ***no olvides dar el contramodelo****: i(p)=F, i(q)=V… ¡encontrar este contramodelo es la mitad del problema!*
- *Puedes usar llaves para los "o bien" y corchetes para los "y además" que sean complejos. Lo importante es entender que significan para decidir si* ⊨ o ⊭ (y que quede claro en el examen que lo entiendes).

Consecuencia lógica: Ejemplo II

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{\, p \land \neg\neg q,\ r \,\} \vDash q \lor s$$

- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  - $i(p \land \neg\neg q) = V$ sii
    - **$i(p) = V$** y además
    - $i(\neg\neg q) = V$ sii $i(\neg q) = F$ sii **$i(q) = V$**
  - **$i(r) = V$**
  - $i(q \lor s) = F$ sii
    - **$i(q) = F$** y (pero entonces $i(p \land \neg\neg q) = F$, por lo que no puede ser)
    - **$i(s) = F$**
- Puesto que <u>no es posible</u> definir un contramodelo, el argumento es correcto: **hay** relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión

Consecuencia lógica: Ejemplo III

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \land q, \neg(p \to r) \} \vDash q \land (p \to r)$$

- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  1. $i(p \land q) = V$ sii

     $i(p) = V$ y además **$i(q) = V$**
  2. $i(\neg(p \to r)) = V$ sii $i(p \to r) = F$

     $i(p) = V$ y además **$i(r) = F$**
  3. $i(q \land (p \to r)) = F$ sii

     $i(q) = F$ (pero entonces $i(p \land q) = F$, por lo que no puede ser)

     o bien

     $i(p \to r) = F$ sii

     $i(p) = V$ y **$i(r) = F$** (compatible con lo requerido por las dos premisas)

- Sí es posible definir un contramodelo del argumento: $i(p) = i(q) = V$, $i(r) = F$, por tanto el argumento no es correcto: **no hay** relación de consecuencia lógica

…otro método válido si encuentras el contramodelo

No es consecuencia lógica, porque existe un contramodelo: i(s)=V, i(r)=F….

$$(p \to q) \to q \vee r\ ,\ r \vee p \to t \wedge q,\ \neg\, t \wedge s\} \vDash\ s \to r$$

V F V V F

V F

….

(pero un fallo puede penalizar más que si desarrollas la búsqueda del contramodelo)

Equivalencia lógica

Dos fórmulas A y B son ***(lógicamente) equivalentes*** (**A ⇔ B, A ≡ B**) sii para toda interpretación i se cumple que i(A) = i(B)

- Esta definición implica que:
  - A y B son consecuencia lógica una de la otra ($A \vDash B$ y $B \vDash A$)
  - la fórmula $A \leftrightarrow B$ es válida ($\vDash A \leftrightarrow B$)

- Por ejemplo: **$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$**

i(p)	i(q)	$i(p \rightarrow q)$	$i(\neg p \vee q)$	$i((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalencia lógica

- La equivalencia entre fórmulas proporciona numerosas ventajas prácticas, entre ellas:
  - permite utilizar indistintamente las fórmulas equivalentes en una demostración (lo utilizaremos en el próximo tema)
  - permite reducir el tamaño de un lenguaje proposicional (disminuir el nº de conectivas que emplea).
    - Por ejemplo, cualquier lenguaje proposicional puede reducirse a otro que sólo utiliza {¬, ∨}
    - Esta reducción simplifica tareas como:
      - ✓ construcción de sistemas sintácticos de demostración
      - ✓ demostración de las propiedades metalógicas del sistema formal
      - ✓ Implementación de circuitos digitales

Equivalencias lógicas

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	doble negación
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la conjunción
$A \vee A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la disyunción
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	conmutatividad de la conjunción
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	conmutatividad de la disyunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$	conmutatividad de la doble implicación
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	asociatividad de la conjunción
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	asociatividad de la disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	la implicación como disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	contraposición
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	ley de De Morgan
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	ley de De Morgan
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	definición de la doble implicación en función de la implicación

Ejercicios de semántica

Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).

1. $[p, p \to q] \vDash q$
2. $[\neg p, p \vee q] \vDash q$
3. $[p \to q, \neg p] \vDash \neg q$
4. $[p \to q, \neg q] \vDash \neg p$
5. $[p \leftrightarrow q, \neg p] \vDash q$
6. $[p \wedge q] \vDash p$
7. $[\neg(p \wedge q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$
8. $[\neg(p \vee q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$

Semántica, ejercicio de examen

Comprueba si hay consecuencia lógica

El orden importa, empieza por lo fácil. Y deja claro cuando has encontrado una interpretación final en tu búsqueda de contramodelo.

$\{ q \wedge r \rightarrow \neg p , \neg (\neg r \rightarrow s \wedge t) , \neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q) \} \vDash s \rightarrow p$

Intenta cerrar opciones según avanzas ("cerrar ramas") y justifícalo en base a las interpretaciones finales

P1: $q \wedge r \rightarrow \neg p$

P2: $\neg (\neg r \rightarrow s \wedge t)$

P3: $\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)$

C: $s \rightarrow p$

$i(C) = F \;\wedge\; i(Pj) = V \quad j = 1,2,3$

- $i(C) = i(s \rightarrow p) = F$ sii **$i(s) = V$** y **$i(p) = F$**

$i(P3) = i(\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)) = V$ sii $i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = V$ ó $i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = F$

como $i(p) = F$, entonces $i(\neg p) = V$, entonces

$i(\neg r \wedge q) = V$ sii $i(\neg r) = V$ (**$i(r) = F$**) y **$i(q) = V$**

$i(P1) = i(q \wedge r \rightarrow \neg p) = V$ se cumple porque $i(q \wedge r) = F$ y $i(\neg p) = V$

$i(P2) = i(\neg (\neg r \rightarrow s \wedge t)) = V$ sii $i(\neg r \rightarrow s \wedge t) = F$ sii

$i(\neg r) = V$ (que ya se cumple) y

$i(s \wedge t) = F$ sii **$i(t) = F$**

Justifica la respuesta con el contramodelo o la explicación de por qué no se ha encontrado.

¡No hay consecuencia lógica!, lo demuestra el siguiente contramodelo:

$i(s) = V$ **$i(p) = F$** **$i(r) = F$** **$i(q) = V$** **$i(t) = F$**

¿Razonas con lógica? (divulgación)

Si una carta tiene una vocal por un lado, entonces tiene que tener un número par por el otro lado

A	K	2	7

¿A qué carta/s hay que dar la vuelta para saber si la regla anterior se cumple o no?

(Peter C. Wason, 66)

https://www.youtube.com/watch?v=t7NE7apn-PA

¿Razonas con lógica? (divulgación)

Si una carta tiene una bebida aun lado, entonces tiene una edad que te permite beberla al otro lado

25 años

16 años

¿A qué carta/s hay que dar la vuelta para saber si la regla anterior se cumple o no?

https://www.youtube.com/watch?v=t7NE7apn-PA

Lógica
Tema 4: Deducción natural en lógica proposicional

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Temas LP

- **Bloque I**

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

¿Qué es una deducción?

- Es una secuencia de afirmaciones en la que progresamos a partir de la información conocida (*premisas*), hasta alcanzar otra información desconocida que nos interesa obtener (*conclusión*).

- Lo que caracteriza una deducción correcta es que cada paso que demos sea "seguro": cada nueva información debe *<u>seguirse de</u>* las anteriores.

- Pueden definirse reglas (de inferencia) que capten los pasos típicos de una deducción.

- El sistema que utiliza esas reglas para realizar deducciones es un cálculo deductivo, y el contexto o marco formal en el que se utiliza ese cálculo se llama sistema formal.
  - Existen distintos tipos de cálculos deductivos. Nosotros utilizaremos el cálculo por deducción natural.

Cálculo deductivo, motivación

- Dificultad para determinar $\Gamma \models$ **B** por medios semánticos
  - Γ (gamma) representa un conjunto de fórmulas: A1, A2…An
  - Confirmar la corrección de un argumento puede ser muy costoso, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones.
- Alternativa: determinar que **B se deduce de** Γ por medios sintácticos: $\Gamma \vdash$ **B**
  - En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones), razonar sobre la forma de las fórmulas. Construir una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido.

Sistemas formales

- Un **sistema formal de demostración** consiste en:
  - Un lenguaje formal (alfabeto y reglas sintácticas de formación de fórmulas)
  - Un conjunto de axiomas lógicos o axiomas (fórmulas válidas sin prueba, podría ser vacío)
  - Un conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas: un cálculo
  - Una definición de prueba o demostración

- En un sistema formal los símbolos carecen de significado, y al manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema

Sistemas formales

- Una **teoría** T es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas no lógicos o premisas (es decir, que se consideran como verdad): **T[Γ]**
  - Si $\Gamma = \varnothing$ entonces T es la teoría básica del sistema formal

- Una **demostración** o **prueba** de una fórmula B en una teoría T[Γ] (**T[Γ] ⊢ B**) es una secuencia finita de fórmulas tal que:
  - toda fórmula de la secuencia es
    - un axioma o premisa de la teoría, o
    - el resultado de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia
  - B es la última fórmula de la secuencia

- Un **teorema** de una teoría T[Γ] es una fórmula para la que existe al menos una demostración en T[Γ]

- T[Γ] ⊢ B indica que B se deduce de T[Γ] o que B es teorema de T[Γ]

Relación con la consecuencia lógica

- Si el cálculo es correcto y completo entonces $\vdash$ y $\vDash$ son equivalentes.
  - Esto es lo que ocurre con la deducción natural.

- **Corrección: Teorema de validez**
  - Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas de Γ:

$$\text{si } T[\Gamma] \vdash B \text{ entonces } \Gamma \vDash B$$

- **Completitud: Teorema de completitud**
  - Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$:

$$\text{si } \Gamma \vDash B \text{ entonces } T[\Gamma] \vdash B$$

Un sistema formal para la lógica proposicional

- **Deducción natural**
  - No hay axiomas lógicos
  - Reglas de inferencia: dos por cada conectiva (introducción y eliminación)
    - 10 en total para los 5 conectores
  - Definición de prueba: una prueba de una fórmula es una secuencia finita de fórmulas en la que cada elemento es:
    - un **supuesto** o premisa de la teoría, o
    - el resultado de la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia

    y la última fórmula de la secuencia es la fórmula probada

Deducción natural: Reglas de inferencia

- En la definición de las reglas de inferencia vamos a usar A y B, que no son símbolos de proposición, sino variables sobre formulas del lenguaje (metavariables)

- Mediante metavariables podemos razonar sobre conjuntos (infinitos) de formulas que comparten una misma forma lógica

  Por ejemplo: $A \wedge \neg A$ agrupa

  - $p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$, $r \wedge \neg r$, ...
  - $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$, $(q \vee r) \wedge \neg(q \vee r)$, ...
  - $((p \rightarrow q) \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow q) \wedge r)$, $(p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge \neg(p \vee q \rightarrow r \wedge s)$, ...
  - ...

- Cada regla de inferencia es una metaregla con infinitas instancias

  - Si p entonces $p \vee q$; si p entonces $p \vee (q \wedge \neg r)$; ...
  - Si $(p \rightarrow q)$ entonces $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge r)$; si $(p \rightarrow q)$ entonces $(p \rightarrow q) \vee$ ...
  - En general: si A entonces $A \vee B$

Reglas básicas: Conjunción

Regla de Introducción de ∧ ($I_\wedge$)

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \wedge B}$$

$T[p, q] \vdash p \wedge q$	
1. p	premisa
2. q	premisa
3. $p \wedge q$	**$I_\wedge$ (1,2)**

Premisas:

1. el asesino es zurdo
2. el asesino calza un 45

Conclusión:

3. el asesino es zurdo y calza un 45

Reglas básicas: Conjunción

Regla de Eliminación de ∧ ($E_\wedge$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

T[p ∧ q] ⊢ p
1. p ∧ q premisa
2. p **$E_\wedge$ (1)**

T[p ∧ q] ⊢ q
1. p ∧ q premisa
2. q **$E_\wedge$ (1)**

Premisa:

1. el asesino es bizco y usa bombín

Conclusión:

2. el asesino es bizco

o bien

2’. el asesino usa bombín

Reglas básicas: Disyunción

Regla de Introducción de ∨ ($I_{\vee}$)

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

T[p] ⊢ p ∨ r
1. p premisa
2. p ∨ r **$I_{\vee}$ (1)**

T[p] ⊢ r ∨ p
1. p premisa
2. r ∨ p **$I_{\vee}$ (1)**

Premisa:

1. el asesino mide 1,90 m

Conclusión:

2. el asesino mide 1,90 m o veranea en Cancún

o bien

2’. el asesino veranea en Cancún o mide 1,90 m

Reglas básicas: Disyunción

Regla de Eliminación de $\vee$ ($E_{\vee}$) o *prueba por casos*

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \end{array}}{C}$$

$T[p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash \neg r$

1.	$p \vee q$	premisa
2.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
3.	$q \rightarrow \neg r$	premisa
4.	$\neg r$	**$E_{\vee}$ (1,2,3)**

1. el asesino huyó en coche o en moto
2. si huyó en coche, se esconde en Cádiz
3. si huyó en moto, se esconde en Cádiz

Conclusión:

4. el asesino se esconde en Cádiz

Ejemplo

$T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$

1.	$s \wedge (p \vee q)$	premisa
2.	$p \vee q$	$E_{\wedge}$ (1)
3.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
4.	$q \rightarrow \neg r$	premisa
5.	$\neg r$	$E_{\vee}$ (2,3,4)
6.	s	$E_{\wedge}$ (1)
7.	$s \wedge \neg r$	$I_{\wedge}$ (5,6)

Reglas básicas: Negación

Regla de Eliminación de ¬ ($E_{\neg}$)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Premisa:

1. no es el caso que el asesino no fume en pipa

Conclusión:

2. el asesino fuma en pipa

Reglas básicas: Implicación

Regla de Eliminación de $\rightarrow$ ($E_{\rightarrow}$) o *Modus Ponens (MP)*

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$

1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	**$E_{\rightarrow}$ (1,2)**
4.	$\neg r \rightarrow q$	premisa
5.	q	**$E_{\rightarrow}$ (3,4)**

Premisa:

1. si Gutiérrez es culpable entonces Clotilde le está encubriendo
2. Gutiérrez es culpable

Conclusión:

3. Clotilde está encubriendo a Gutiérrez

Reglas básicas: Doble implicación

Regla de Introducción de $\leftrightarrow$ ($I_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array}}{A \leftrightarrow B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow p] \vdash p \leftrightarrow \neg r$	
1. $p \rightarrow \neg r$	premisa
2. $\neg r \rightarrow p$	premisa
3. $p \leftrightarrow \neg r$	**$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)**

1. si el asesino huyó en coche entonces bebe vodka
2. si el asesino bebe vodka entonces huyó en coche

Conclusión:

4. el asesino huyó en coche si y sólo si bebe vodka

Reglas básicas: Doble implicación

Regla de Eliminación de $\leftrightarrow$ ($E_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$T[p \leftrightarrow q \wedge r, p] \vdash r$

1.	$p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2.	$p \rightarrow q \wedge r$	**$E_{\leftrightarrow}$ (1)**
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,3)
5.	r	$E_{\wedge}$ (4)

1. Gutiérrez es culpable si y sólo si ama a Clotilde

Conclusión:

2. si Gutiérrez es culpable entonces ama a Clotilde

o bien

2'. si Gutiérrez ama a Clotilde entonces es culpable

Reglas básicas: supuestos

- Nos quedan dos reglas básicas por definir:
  - introducción de la negación o prueba por reducción al absurdo
  - introducción de la implicación o teorema de la deducción

- Ambas se basan en el empleo de supuestos que, como las premisas, pueden aparecer en una prueba sin requerir demostración

- Pero, mientras que las premisas son añadidas permanentemente los supuestos son incorporados temporalmente:
  - Un supuesto es *introducido* en un determinado punto de la prueba
  - y es *cancelado* (descargado) en otro punto posterior,
  - como resultado de la cancelación, una *nueva fórmula* queda demostrada

- Lo que significa usar un supuesto es lo siguiente:
  - «supongamos que A»
  - «entonces demuestro (usando A) que B»
  - «en realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, entonces podría demostrar B»
  - «eso equivale a decir que he demostrado la implicación $A \rightarrow B$»

Supuestos y el teorema de la deducción

Formulación genérica de la regla de introducción de la implicación:

- ❑Siendo $T[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ una teoría básica ampliada con un conjunto de n premisas, si la incorporación como supuesto de un fórmula A permite deducir otra fórmula B:

$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \cup \{A\} \vdash B$$

entonces

$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \vdash A \rightarrow B$$

- ❑Teorema de la deducción: En general, tanto para premisas como para supuestos:

$$T[A] \vdash B \text{ si y sólo si } T \vdash A \rightarrow B$$

Reglas básicas: supuestos

Regla de Introducción de $\to$ ($I_{\to}$) o *T. de la deducción*

$$\frac{\begin{array}{c}A \text{ (supuesto)} \\ B\end{array}}{A \to B}$$

$T[p \to q, q \to r] \vdash p \to r$

1.	$p \to q$		premisa
2.	$q \to r$		premisa
	3.	p	supuesto
	4.	q	$E_{\to}$ (1,3)
	5.	r	$E_{\to}$ (2,4)
6.	$p \to r$		**$I_{\to}$ (3,5)**

La tabulación indica un supuesto no cancelado

Supuesto:

1. (*supongamos que*) la víctima fue envenenada

……….. bla, bla, bla ……….. (*secuencia de inferencias válidas*)

n. el asesino es el conde Lequio

Conclusión:

n+1. Si la víctima fue envenenada entonces el asesino es el conde Lequio

¡Pero hay un "si"! ¿cuándo es verdadera una im?

Reglas básicas: supuestos

Regla de Introducción ¬ ($I_{\neg}$) o <u>prueba por reducción al absurdo</u>

$$\frac{\begin{array}{l} A \text{ (supuesto)} \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A} \quad \textbf{o} \quad \frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

T[¬p → q ∧ ¬q] ⊢ p

1.	¬p → q ∧ ¬q	premisa
2.	¬p	supuesto
3.	q ∧ ¬q	MP (1,2)
4.	¬¬p	**$I_{\neg}$ (2,3)**
5.	p	**$E_{\neg}$ (4)**

Supuesto:

1. (*supongamos que*) el asesino no huyó a Cádiz

……….. bla, bla, bla ……….. (*secuencia de inferencias válidas*)

n. Gutiérrez es dentista y no es dentista

Conclusión:

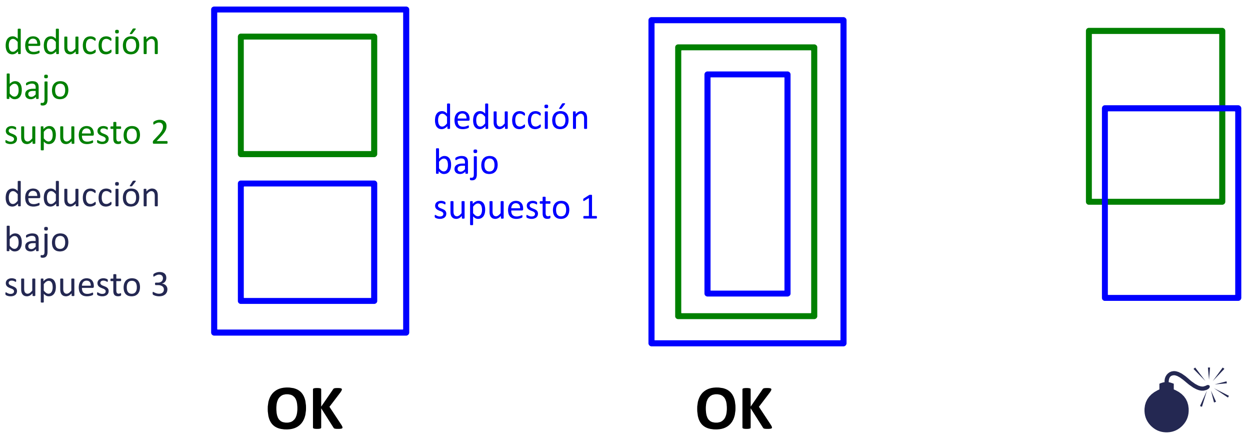
n+1. el asesino huyó a Cadiz

Los supuestos de **$I_{\rightarrow}$** y **$I_{\neg}$** son útiles porque nos dejan añadir a la demostración formulas completas que no hayan aparecido ¿alguna otra regla lo permite? Sólo $I_{\vee}$.

22

Procedimiento general de deducción

- Cada premisa y cada nueva fórmula obtenida mediante las reglas de inferencia se escribe en una línea numerada
- La prueba termina cuando llegamos a una línea, fuera de todo supuesto no cancelado, que contiene la fórmula que queremos deducir
- Pueden introducirse tantos supuestos como se deseen pero la cancelación de los mismos ha de hacerse con cuidado:



Regla auxiliar: Iteración

Podemos repetir fórmulas ya obtenidas en la deducción siempre que no las saquemos de supuestos no cancelados (aunque se pueden *meter* dentro de supuestos abiertos):

$T[\, p \land p \rightarrow q \,] \vdash p \rightarrow q$

1.	$p \land p \rightarrow q$		premisa
	2.	p	supuesto
	3.	p	Iteración 2
	4.	$p \land p$	$I_{\land}$ (2,3)
	5.	q	MP (1,4)
6.	$p \rightarrow q$		$I_{\rightarrow}$ (2,5)

$T \vdash p \lor q$

	1.	p	supuesto
	2.	$p \lor q$	$I_{\lor}$ 1
3.	$p \lor q$		Iteración 2

Reglas derivadas

En distintas demostraciones se repiten con frecuencia los mismos pasos:

$T[r \to (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$	
1. $r \to (q \wedge s)$	premisa
2. $\neg(q \wedge s)$	premisa
3. r	supuesto
4. $q \wedge s$	$E_{\to}$ (1,3)
5. $(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I_{\wedge}$ (2,,4)
6. $r \to (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I_{\to}$ (3,5)
7. $\neg r$	$I_{\neg}$ (6)

$T[p \to q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$	
1. $p \to q$	premisa
2. $r \wedge \neg q$	premisa
3. $\neg q$	$E_{\wedge}$ (2)
4. p	supuesto
5. q	$E_{\to}$ (1,4)
6. $q \wedge \neg q$	$I_{\wedge}$ (3,5)
7. $p \to q \wedge \neg q$	$I_{\to}$ (4,6)
8. $\neg p$	$I_{\neg}$ (7)
9. r	$E_{\wedge}$ (2)
10. $r \wedge \neg p$	$I_{\wedge}$ (8,9)

- Aunque son distintas las fórmulas que aparecen en estos dos ejemplos, las líneas destacadas tienen una estructura común
- Podríamos acortar las dos demostraciones si previamente demostramos con carácter general que $T[A \to B, \neg B] \vdash \neg A$, para cualesquiera fórmulas A y B.

Reglas derivadas

$T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$		
1.	$A \rightarrow B$	premisa
2.	$\neg B$	premisa
3.	A	supuesto
4.	B	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5.	$B \wedge \neg B$	$I_{\wedge}$ (2,4)
6.	$A \rightarrow B \wedge \neg B$	$I_{\rightarrow}$ (3,5)
7.	$\neg A$	$I_{\neg}$ (6)

Las reglas derivadas se representan como las reglas básicas:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Modus Tollens (MT)

Las demostraciones anteriores quedarían ahora:

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$		
1.	$r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2.	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3.	$\neg r$	**MT (1,2)**

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$		
1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \wedge \neg q$	premisa
3.	$\neg q$	$E_{\wedge}$ (2)
4.	$\neg p$	**MT (1,3)**
5.	r	$E_{\wedge}$ (2)
6.	$r \wedge \neg p$	$I_{\wedge}$ (8,9)

Reglas derivadas

Estas son las reglas derivadas de uso más frecuente, queda como ejercicio su demostración a partir de las reglas básicas:

- $T[A \land \neg A] \vdash B$ — Ex Contradictione Quodlibet

➢ Reglas para la implicación:

- $T[A \rightarrow B, B \rightarrow C] \vdash A \rightarrow C$ — Transitividad
- $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$ — Modus Tollens

➢ Reglas de corte:

- $T[A \lor B, \neg A] \vdash B$ — Corte
- $T[A \lor B, \neg B] \vdash A$ — Corte
- $T[A \lor B, \neg A \lor C] \vdash B \lor C$ — Corte

Teorema de intercambio (o sustitución)

Sea A una fórmula y B1 una subfórmula de A, si

- $\vdash$ A
- $\vdash$ B1 $\leftrightarrow$ B2
- A' resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2

entonces

- $\vdash$ A'

Es válido utilizar equivalencias vistas en el tema de semántica

$T[p \leftrightarrow r, q \rightarrow s, s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow t \wedge p$

1.	$q \rightarrow s$	premisa
2.	$s \rightarrow t \wedge r$	premisa
3.	q	supuesto
4.	s	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5.	$t \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6.	$p \leftrightarrow r$	premisa
7.	$t \wedge p$	**Intercambio (5,6)**
8.	$q \rightarrow p \wedge t$	$I_{\rightarrow}$ (3,8)

Equivalencias lógicas

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	doble negación
$A \land A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la conjunción
$A \lor A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la disyunción
$A \land B \Leftrightarrow B \land A$	conmutatividad de la conjunción
$A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$	conmutatividad de la disyunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$	conmutatividad de la doble implicación
$A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$	asociatividad de la conjunción
$A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$	asociatividad de la disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$	la implicación como disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	contraposición
$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$	ley de De Morgan
$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$	ley de De Morgan
$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$	distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$	distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$	definición de la doble implicación en función de la implicación

Se pueden aplicar en los dos sentidos.

Ejemplo de uso en DN: “Intercambio 3, $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$”.

No es válido: “equivalencia”, “de Morgan”, “$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$)”, no incluir el número donde se aplica, no hacer mención al teorema del intercambio, etcétera

Deducción natural en la práctica

- Como conclusión, ¿qué podemos utilizar para demostrar la corrección de una argumentación mediante deducción natural?
  - Las 10 reglas básicas
  - La regla de iteración
  - Las reglas derivadas mencionadas previamente (en ocasiones se piden demostraciones sin usar estas reglas)
  - El (teorema de) intercambio
    - Incluyendo equivalencias dadas siempre y cuando se especifique su formula con metavariables.
  - Y NADA MÁS

comprobar online.

Resumen DN

$I_\wedge$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$E_\wedge$

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$I_\vee$

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

$E_\vee$

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

$I_\rightarrow$

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ (supuesto)} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$E_\rightarrow$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

$I_\leftrightarrow$

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$$

$E_\leftrightarrow$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$I_\neg$

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ (supuesto)} \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A} \qquad \frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

$E_\neg$

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Derivadas

- T[A ∧ ¬A] ⊢ B Ex Contradictione Quodlibet
- T[A → B, B → C] ⊢ A → C Transitividad
- T[A → B, ¬B] ⊢ ¬A Modus Tollens
- T[A ∨ B, ¬A] ⊢ BCorte
- T[A ∨ B, ¬B] ⊢ A Corte
- T[A ∨ B, ¬A ∨ C] ⊢ B ∨ C Corte

- + regla de iteración + teorema del intercambio (y equivalencias)

Sobre el uso de supuestos

- Un supuesto es una formula temporal añadida a la demostración.
  - no se deduce de lo anterior,
  - pero sirve para demostrar OTRA formula cuando se cancela.
- Se deben abrir con una estrategia, teniendo en cuenta qué se quiere conseguir con él.
- Siempre se deben cancelar, ya sea con $I_{\rightarrow}$ o con $I_{\neg}$
- Por lo tanto, supongo A si:
  - O bien, busco $A \rightarrow B$ (cierro el supuesto al encontrar B, regla $I_{\rightarrow}$)
  - O bien, busco $\neg A$ (cierro al encontrar una contradicción cualquiera $B \land \neg B$, regla $I_{\neg}$)
- NUNCA supongo A si busco A (o cualquier otra cosa que no sea $A \rightarrow B$ o $\neg A$)

Estrategia general problemas DN

- Identifica la conectiva principal y el tipo de formula de la conclusión y opera según lo siguiente:
  - Si es $A \rightarrow B$, supón A y usa $\mathbf{I}_{\rightarrow}$ cuando encuentres B.
  - Si es $A \wedge B$, prueba A, prueba B, y usa $\mathbf{I}_{\wedge}$.
  - Si es $A \vee B$, prueba A o B (el más fácil), y usa $\mathbf{I}_{\vee}$.
    - La última estrategia, suponer $\neg(A \vee B)$ puede ser útil.
  - Si es $A \leftrightarrow B$, prueba $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, y aplica $\mathbf{I}_{\leftrightarrow}$
  - Si es $\neg A$, supón A, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.
  - Si es A, intenta encontrar una solución trivial con los elementos previos de la deducción (la $\mathbf{I}_{\vee}$ puede ser útil). Si no lo consigues, supón $\neg A$, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.

  - Si todo falla, supón la conclusión negada en bloque, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.

  - Si la demostración no tiene premisas, es necesario empezar con un supuesto, ya sea de A para demostrar $\vdash A \rightarrow B$ o bien de $\neg A$ para demostrar $\vdash A$

A guide to Natural Deduction proofs

Más estrategias Deductivas

Fórmula	Como Premisa	Como Conclusión
$P \wedge Q$	Deduce P y deduce Q	Demuestra P y Q por separado
$P \vee Q$	Demuestra $P \rightarrow$ __, $Q \rightarrow$ __, y deduce __	Demuestra o P o Q
$P \rightarrow Q$	Demuestra P, y deduce Q	Supón P y demuestra Q
$\neg P$	Si $\neg P$ es $\neg\neg Q$, deduce Q	Supón P y demuestra __ $\wedge \neg$__
$P \leftrightarrow Q$	Deduce $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$	Demuestra $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$
$\forall x\, P(x)$	Deduce P(_)	Demuestra P(x) para la variable x
$\exists x\, P(x)$	Deduce P(a*) para algún nombre temporal nuevo	Demuestra P(_)

Ejercicios I

1. $T[p] \vdash q \rightarrow p$
2. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
3. $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$
4. $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash q \rightarrow p$
5. $T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$
6. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r), q] \vdash p \rightarrow r$
7. $T[p \wedge q \rightarrow r, r \wedge s \rightarrow t] \vdash p \wedge q \wedge s \rightarrow t$
8. $T[p \wedge q \rightarrow r] \vdash p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$
9. $T[p \vee q \rightarrow r, s \rightarrow p] \vdash s \rightarrow r$
10. $T[p \wedge q \rightarrow r, \neg(p \vee r) \rightarrow s, p \rightarrow q] \vdash \neg s \rightarrow r$
11. $T[p \vee p] \vdash p$
12. $T[p] \vdash \neg\neg p$
13. $T[p \vee q \rightarrow r] \vdash q \rightarrow r$

Pista:

- Queremos concluir que A→B, siendo A=p→q y B=p→r, luego mi primer supuesto es p→ q.
- Dentro del supuesto, queremos concluir, otra vez, que A→B, donde A=p y B=r. Luego mi segundo supuesto será p.
- Dentro de él quiero llegar a r. Así que intento alcanzarlo con las formulas que tengo en la demostración hasta ahora.
- Si lo conseguimos, cerramos los supuestos para acabar.
- ¿Y si no?, supuesto de ¬r para intentar I¬ y llegar a ¬¬r. Ver ejercicio 10.

Deducción natural, ejercicio de examen

Demuestra con deducción natural: $T\,[\,p \to (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ ,\ \neg(p \to \neg s) \to t\ ]\ \vdash\ p \to (\neg q \to \neg s)$

1. $p \to (q \vee \neg r)$	premisa
2. $\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3. $\neg (p \to \neg s) \to t$	premisa
4. p	supuesto
5. $\neg q$	supuesto
6. $q \vee \neg r$	4 y 1 elim $\to$
7. $\neg r$	5, 6 corte
8. $\neg r \to \neg t$	2 elim. $\leftrightarrow$
9. $\neg t$	7, 8 elim $\to$
10. $\neg\neg(p \to \neg s)$	MT 3, 9
11. $p \to \neg s$	elim $\neg$, 10
12. $\neg s$	4, 11, elim $\to$
13. $\neg q \to \neg s$	5, 12 introd $\to$
14. $p \to (\neg q \to \neg s)$	4, 13 introd $\to$

¡Deja claro cuando empieza y termina un supuesto!, tabulaciones, llaves, etcétera.

¿A qué conclusión queremos llegar?

$\boxed{\vdash\ p \to (\neg q \to \neg s)}$

$\boxed{\neg q \to \neg s}$

$\boxed{\neg s}$

¿Y si no sale ¬s por ningún sitio?
Intentaría suponer su negación, s,
y llegar a una contradicción. ¿Y si tampoco? Probaría suponer ¬(¬q → ¬s), y llegar a una contradicción. ¿Y si tampoco?, etc etc.

¡Las reglas se aplican a rajatabla!, aquí no vale poner directamente p → ¬s

Hacer una simplificación no explícita penalizaría en el ejercicio. Una deducción se puede complicar mucho en base a esto, ejemplo,

$\neg (\neg p \wedge \neg q) \vdash (p \vee q)$

La premisa con intercambio y equivalencia de la ley de Morgan daría:

$\neg\neg p \vee \neg\neg q$ (no p ∨ q directamente)

En este ejemplo, no puedo aplicar E¬… pero sí podría aplicar intercambio con la equivalencia: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

IMPORTANTE: Siempre que uses una equivalencia pon:

Intercambio, nº donde se aplica, formula con metavariables. Omitir algo de esto penalizaría. Ejemplo: **Intercambio 3, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$**

SÓLO INFORMATIVO

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Lógica
Tema 5: Forma Clausal

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Temas LP

- **Bloque I**

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Introducción a la demostración automática

- El **razonamiento automático** se dedica a estudiar cómo usar un ordenador para ayudar en la parte de resolución de problemas que requiere razonamiento.
- Se trata de implementar programas que verifiquen un razonamiento mediante una serie de pasos de inferencia.
- Se suele denominar **deducción automática** porque se suele utilizar razonamiento como proceso deductivo.
- Cuando el trabajo se centra en la obtención de algoritmos que permitan encontrar pruebas de teoremas matemáticos, recibe el nombre de ***demostración automática de teoremas* (DAT)**.

- Algunas cuestiones que surgen durante dicho estudio son la representación del conocimiento, las reglas para derivar nuevo conocimiento del que se tiene, y las estrategias para controlar dichas reglas.
- Otras cuestiones se refieren a la implementación de la teoría resultante y a las aplicaciones para las cuales el correspondiente software puede ser usado. Teoría, implementación y aplicaciones juegan papeles vitales para el razonamiento automático a la hora de intentar alcanzar uno de sus principales objetivos: proporcionar un asistente de razonamiento automático.

Introducción a la demostración automática

- Los D.A.T.:
  - Hacen uso de una representación especial de las formulas, una representación estandarizada: la **forma clausal o clausular**.
  - Los DAT utilizan **resolución** (principio de Robinson) aplicando un algoritmo que se aplica a un conjunto de clausulas de entrada y comprueba si son insatisfacibles.
  - Por ultimo, destacar que en la mayoría de los casos, los demostradores automáticos de teoremas realizan **pruebas por contradicción (o refutación)**.

Introducción a la demostración automática

- Forma Clausular:
  - Objetivo: **simplificar las fórmulas.** Queremos obtener, mediante una serie de ***transformaciones***, una fórmula que sea más fácil de manipular automáticamente, pero que siga teniendo ciertas propiedades de la fórmula original (estandarización):

Fórmula en un lenguaje proposicional	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge p$
⇓	⇓
Fórmula en forma normal conjuntiva	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p)$
⇓	⇓
Fórmula en forma clausular	$\{\neg p \vee q, \neg p \vee q \vee \neg r, p\}$

Formas Normales

- En este tema vemos la definición de clausula y cómo transformar una fórmula en un conjunto de clausulas mediante las **formas normales.**
- Tenemos en cuenta que un **átomo** es una variable proposicional (ej: p, q,..) y que un **literal** es un átomo o su negación (ej: p, ¬p,..)
- **Formas Normales.** El objetivo de la estandarización de fórmulas es reducir la variedad sintáctica de un LP, uniformando sus fórmulas.
- La idea es que la **fórmula inicial es satisfacible sii su transformada es satisfacible**.
  - Reducción de la multiplicidad de conectivas (formas normales en la lógica proposicional).
    - Forma normal conjuntiva. FNC
    - Forma normal disyuntiva. FND
  - Forma Clausal o Clausular (variante sintáctica de la Forma Normal Conjuntiva).

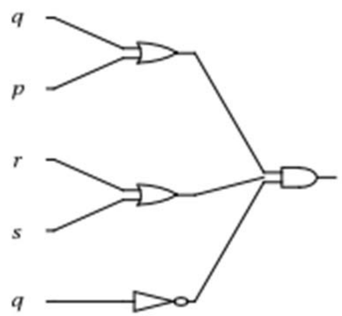
Formas Normales

- **Forma Normal Disyuntiva.** Una FBF A está en forma normal disyuntiva si y solo si $A \equiv A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n$ con $n \geq 1$, y cada A_i es una conjunción de literales.

  Ejemplo: $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee \neg p \vee (r \wedge \neg s)$

- **Forma Normal Conjuntiva.** Una FBF A está en forma normal conjuntiva si y solo si $A \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n$ con $n \geq 1$, y cada A_i es una disyunción de literales.

  Ejemplo: $(q \vee p) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg q$



Formas Normales

Procedimiento para hallar FNC(A) y FND(A). Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:

- Interdefinición (Eliminar bicondicionales y condicionales usando la equivalencia):

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- Leyes de De Morgan (interiorizar negaciones usando equivalencias):

$$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$$

- Distribución de $\vee$ y $\wedge$:

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Teorema: Para toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow FNC(A)$

Lema: La forma normal conjuntiva de una fórmula siempre existe

Forma Normal Conjuntiva

- **Ejemplos de cálculo de FNC:**

<u>Ejemplo1</u>: $A : (p \rightarrow q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$\neg (p \rightarrow q) \vee r$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$\neg (\neg p \vee q) \vee r$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
$(\neg \neg p \wedge \neg q) \vee r$	$\neg \neg A \leftrightarrow A$
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	

$$FNC(A) = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

Forma Normal Conjuntiva

Ejemplo2: A:

$$\neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \qquad \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg p \vee \neg(q \rightarrow r) \qquad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$\neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \qquad \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) \qquad \neg\neg A \leftrightarrow A$$
$$\neg p \vee (q \wedge \neg r) \qquad A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

$$\text{FNC}(A) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Ejemplo3: A:

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p) \qquad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$(\neg p \vee r) \vee (q \rightarrow p) \qquad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee p)$$
$$\neg p \vee r \vee \neg q \vee p$$

$$\text{FNC}(A) = \neg p \vee r \vee \neg q \vee p$$

FNC. Ejercicios

- $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
- $(p \wedge q) \rightarrow q$
- $\neg\,(\neg r \vee (q \wedge s)) \wedge \neg p$
- $p \rightarrow \neg(q \wedge r) \vee \neg(p \wedge s)$
- $p \rightarrow \neg(q \wedge r) \vee \neg(p \vee s)$

Forma Clausular

- Sabemos que "Una fórmula F es satisfacible sii FN(F) es satisfacible" y que "FN(F) existe siempre para cualquier fórmula F", luego **podemos trabajar exclusivamente con fórmulas en forma normal**.
- Para trabajar más cómodamente con fórmulas en FNC utilizaremos la forma clausular
- La mayoría de procedimientos de prueba operan por refutación. Estas pruebas se aplican a formulas en una forma denominada ***forma clausal***.

- **Cláusula:** Una cláusula es una disyunción finita de cero o más literales. Cuando la cláusula está compuesta de un solo literal diremos que es una cláusula unitaria.

$$C = L_1 \vee \ldots \vee L_n, \qquad L_i (1 \leq i \leq n) \text{ literal}$$

- La **Cláusula vacía** no contiene ningún literal, se representa por □, y por convenio es insatisfacible.
- La **forma clausular de una fórmula F, FC(F)**, es el conjunto de cláusulas de la FNC(F).
- La **forma clausular** se entiende como la conjunción de las cláusulas.

Forma Clausular

- **Forma Clausular de una deducción.**
- Una deducción [P1, P2, …, Pn] |— C es correcta sii P1 $\wedge$ P2 $\wedge$ … $\wedge$ Pn $\wedge$ $\neg$C es insatisfacible

Dada una deducción: [P1, P2, …, Pn] |— C

1) Obtener la forma clausular de cada Pi, $1 \leq i \leq n$
2) Obtener la forma clausular de $\neg$C
3) Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
4) Comprobar la satisfacibilidad

Una deducción [P1, P2, …, Pn] |— C es correcta sii

FC(P1 $\wedge$ P2 $\wedge$ … $\wedge$ Pn $\wedge$ $\neg$C) es insatisfacible

Forma Clausular

Ejemplo1: A : $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

$$FNC(A) = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$FC(A) = \{p \vee r, \neg q \vee r\}$$

Ejemplo2: A: $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$

$$FNC(A) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

$$FC(A) = \{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r\}$$

Ejemplo3: A: $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p)$

$$FNC(A) = \neg p \vee r \vee \neg q \vee p$$

$$FC(A) = \{\neg p \vee r \vee \neg q \vee p\}$$

Forma Clausular. Ejercicios

- $p \rightarrow q \wedge r$
- $p \rightarrow \neg(q \wedge r)$
- $\neg(p \wedge \neg q)$
- Dado el conjunto de fórmulas {A1,A2,A3,A4}, obtener la forma clausular siendo:

  A1: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p)$

  A2: $s \rightarrow t$

  A3: $t \rightarrow p$

  A4: $\neg q \wedge s \wedge r$

SÓLO INFORMATIVO

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Lógica
Tema 6: Resolución

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Temas LP

- **Bloque I**

Representación

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Razonamiento

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Computación

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Introducción

- **Principio de resolución.** Proporciona un método automático para realizar demostraciones a partir de clausulas.

- El algoritmo se basa en una regla de inferencia sencilla y, a la vez de gran potencia: **la regla de resolución.** Puesto que se utiliza una sola regla, el algoritmo es fácil de analizar e implementar.

- **Resolvente.** Sean C_1 y C_2 cláusulas. Supongamos que el literal $L \in C_1$ y su complementario $L^c \in C_2$. Se denomina resolvente de C_1 y C_2 respecto a L a la cláusula a:

$$Res(C_1, C_2) = (C_1 - \{L\}) \cup (C_2 - \{L^c\})$$

$$\frac{L \vee C1 \qquad \neg L \vee C2}{C1 \vee C2}$$

- Ejemplo: $S = \{ p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg r, p \vee t \}$

1) $p \vee q$
2) $\neg p \vee r$
3) $\neg q \vee r$
4) $\neg r$
5) $p \vee t$

6) $Res(C_1, C_2) = q \vee r = C_6$
7) $Res(C_3, C_4) = \neg q = C_7$
8) $Res(C_7, C_6) = r = C_8$
9) $Res(C_8, C_4) = \square$

El método de resolución de Robinson

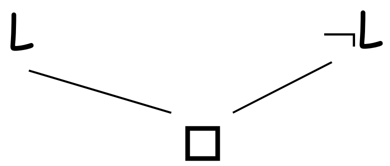
- **Regla de resolución**. Dadas dos clausulas, la aplicación de la regla permite determinar el resolvente de un par de clausulas.

$$\frac{L \vee C1 \qquad \neg L \vee C2}{\boxed{C1 \vee C2}}$$

- **Teorema.** La regla de resolución preserva la satisfacibilidad. Es decir, si una valuación satisface un conjunto de cláusulas, también satisface cualquier resolvente de un par de ellas.
- El resolvente de dos cláusulas es consecuencia lógica de ellas. Es decir $\{C_1,C_2\} \vDash R(C_1, C_2)$
- **Deducción por resolución.** Dadas dos clausulas, la aplicación de la regla permite determinar el resolvente de un par de clausulas.
- **Idea general del método de resolución:** Plantear un método de obtención de nuevas clausulas deducidas del conjunto original, de forma que **si llega a deducirse un literal y su negación puede concluirse que el conjunto original es insatisfacible**.
  - Está basado en el ***lema de la contradicción***: Una fórmula F es insatisfacible sii a partir de ella se puede deducir una contradicción ($T[F] \vdash P \wedge \neg P$)

El método de resolución de Robinson

- La contradicción se obtiene cuando se deducen dos clausulas (literales aislados) L y $\neg$L. La aplicación de la regla sobre L y $\neg$L genera $\square$, llamada **cláusula vacía**



- **Si por la aplicación del método de resolución deducimos $\square$, entonces el conjunto inicial de cláusulas es insatisfacible.**

- Por tanto, **el método general de insatisfacibilidad se puede reducir a la búsqueda de $\square$** a partir del conjunto de cláusulas, en lugar de tener que generar conjuntos de instancias básicas.

El método de resolución de Robinson

Método: Dado un conjunto C de clausulas:

1) Generar el conjunto R de todos los resolventes que pueden obtenerse aplicando la regla de resolución entre clausulas del conjunto C de todas las formas posibles

2) Si $\square$ está incluida en R entonces terminar ➔ C es insatisfacible

3) Si $R \subseteq C$ significa que ya se han generado todos los resolventes posibles, entonces terminar ➔ C es satisfacible

4) Hacer $C = C \cup R$ y repetir desde 1)

- ¡Prolog se basa en este método!
  - Un sistema de pruebas completo con una sola regla

El método de resolución de Robinson

- El método de resolución es correcto
  - Si por la aplicación sucesiva de la regla de resolución deducimos □, entonces el conjunto inicial de clausulas es insatisfacible.
- El método de resolución es completo
  - Si el conjunto inicial es insatisfacible, entonces podemos asegurar que con la aplicación sucesiva de la regla de resolución llegaremos a deducir la cláusula vacía.
- $\vdash$ y $\models$ son equivalentes.
- Se podría definir un nuevo sistema de deducción basado en la regla de resolución. Este sistema tendría una única regla y por tanto sería mucho más simple que otros sistemas de deducción formales que utilizan más reglas de deducción (ej. deducción natural)

El método de resolución de Robinson

- **C = {C_1: ¬p, C_2: p ∨ q, C_3: p ∨ ¬q}**

  resuelve C_1 con C_2: q
  resuelve C_1 con C_3: ¬q
  resuelve C_2 con C_3: p ∨ p
- R = {C_4: q, C_5: ¬q, C_6: p ∨ p}
- En R no está □, por tanto redefinimos C = C ∪ R y buscamos nuevos resolventes:

  resuelve C_1 con C_4: NO
  resuelve C_1 con C_5: NO
  resuelve C_1 con C_6: p

  resuelve C_2 con C_4: NO
  resuelve C_2 con C_5: p
  resuelve C_2 con C_6: NO

  resuelve C_3 con C_4: p
  resuelve C_3 con C_5: NO
  resuelve C_3 con C_6: NO

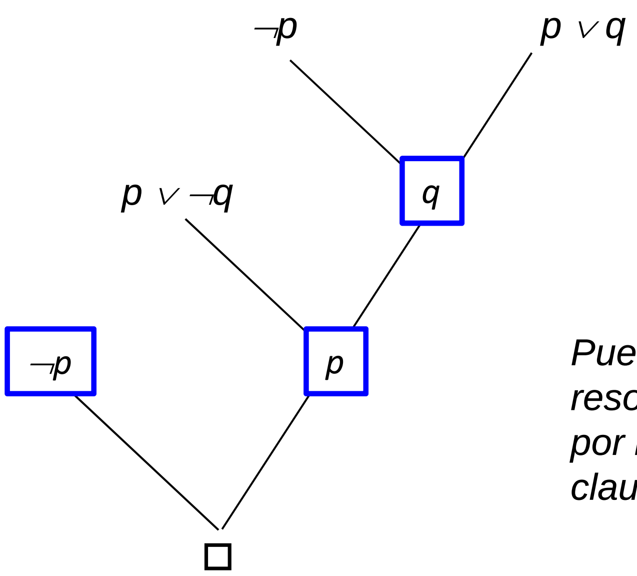
  resuelve C_4 con C_5: □
  resuelve C_4 con C_6: NO

  resuelve C_5 con I6: NO
- R = {C_7: p, □}
- R incluye a □ ➔ **C es insatisfacible**

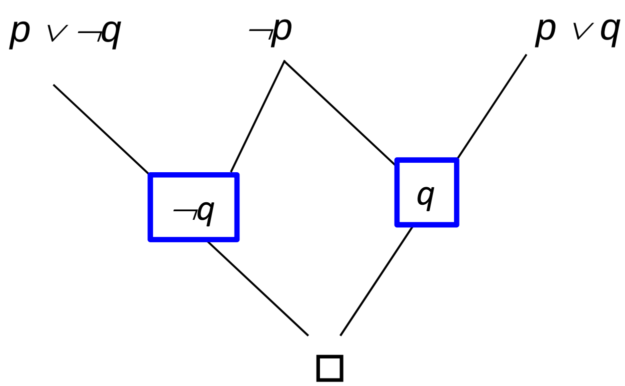
Búsqueda de una refutación

- En la práctica, la aplicación de sucesivos pasos de resolución se puede representar en forma de árbol (árbol de resolución):
  - árbol binario invertido (cada dos nodos tienen un ‘hijo’ común)
  - cada nodo representa una instancia básica
  - el nodo hijo de otros dos nodos es el resolvente de las instancias correspondientes
- En el árbol de resolución sólo se representan los pasos relevantes para llegar a □

Conjunto de instancias básicas: $\{\neg p, p \vee q, p \vee \neg q\}$



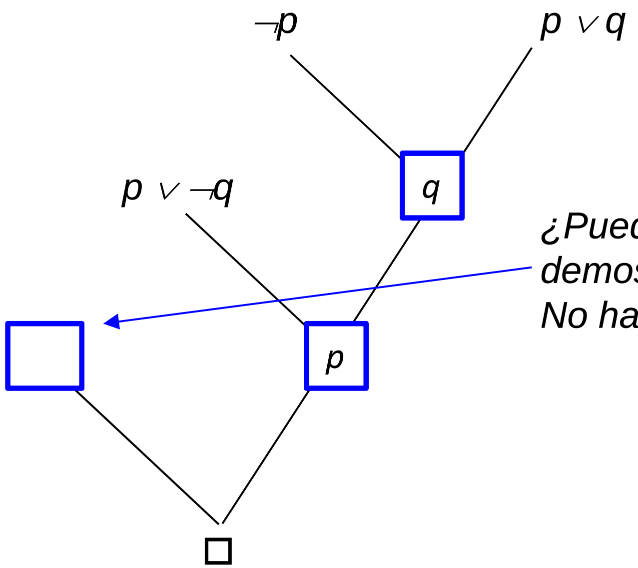
Puede deducirse por resolución la cláusula vacía, por lo que el conjunto de clausulas es insatisfacible



Para un mismo conjunto de clausulas puede haber más de un árbol de resolución.

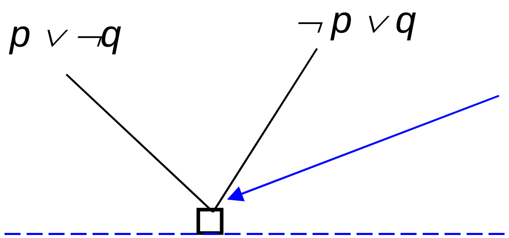
Dos errores típicos

Conjunto de instancias básicas: {¬p, p ∨ q, p ∨ ¬q}



¿Puedo volver a utilizar la clausula de ¬p? Claro, no afecta a la demostración como la iteración no afectaba en Deducción natural. No hay que olvidar que hay una conjunción implícita.

Conjunto de instancias básicas: { p ∨ ¬q, ¬ p ∨ q}



"…porque parece correcto". Pero no lo es. El resolvente es p ∨ ¬p o q ∨ ¬q… pero no la clausula vacía. Si dudas, puedes usar (en sucio) tablas de verdad, árboles de verdad, o búsqueda de contramodelo.

Más consejos:

- No tienes que usar todas las clausulas, lo importante es llegar a la clausula vacía (si es posible).
- Se permite el pequeño atajo de asumir que *A ∨ ¬L y A ∨ L, de A en lugar de A ∨ A.* También aplicar idempotencia: A ∨ A ∨ B equivale a A ∨ B
- Busca literales sueltos en las resolventes como primer paso.
- El árbol de resolución suele (pero no necesariamente) empezar por las clausulas de la conclusión.

Procedimiento de Saturación

- La búsqueda de una refutación se puede realizar de modo arbitrario, sin embargo, es necesaria una sistematización para esta búsqueda. El modo más simple (conceptualmente hablando) de sistematizar la búsqueda de una refutación o bien la de asegurar que no existe, se basa en la generación sucesiva de todas las posibles resolventes a partir del conjunto de partida.

- **Procedimiento de saturación:** Sea C un conjunto de cláusulas
  1) Sea $S_0 = C$ y $n = 0$
  2) Si $\square \in S_n \Rightarrow$ C es insatisfacible
  3) Construir $S_{n+1} = \{\text{resolventes de } C1 \text{ y } C2 \ / \ C1 \in (S_0 \cup \ldots \cup S_n), C2 \in S_n\}$
  4) Si $S_{n+1} = \varnothing$ o $S_{n+1} \subset S_0 \cup \ldots \cup S_n \Rightarrow$ C es satisfacible
  5) Hacer n = n+1 y repetir desde 2)

Procedimiento de Saturación

S_0:	1)	$P \lor Q$	
	2)	$\neg P \lor Q$	
	3)	$P \lor \neg Q$	
	4)	$\neg P \lor \neg Q$	
S_1:	5)	Q	de 1) y 2)
	6)	P	de 1) y 3)
	7)	$Q \lor \neg Q$	de 1) y 4)
	8)	$P \lor \neg P$	de 1) y 4)
	9)	$Q \lor \neg Q$	de 2) y 3)
	10)	$P \lor \neg P$	de 2) y 3)
	11)	$\neg P$	de 2) y 4)
	12)	$\neg Q$	de 3) y 4)
S_2:	13)	$P \lor Q$	de 1) y 7)
	14)	$P \lor Q$	de 1) y 8)
	15)	$P \lor Q$	de 1) y 9)
	16)	$P \lor Q$	de 1) y 10)
	17)	Q	de 1) y 11)
	18)	P	de 1) y 12)
	19)	Q	de 2) y 6)
	20)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 7)
	21)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 8)
	22)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 9)
	23)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 10)
	24)	$\neg P$	de 2) y 12)
	25)	P	de 3) y 5)
	26)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 7)
	27)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 8)
	28)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 9)
	29)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 10)
	30)	$\neg Q$	de 3) y 11)
	31)	$\neg P$	de 4) y 5)
	32)	$\neg Q$	de 4) y 6)
	33)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 7)
	34)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 8)
	35)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 9)
	36)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 10)
	37)	Q	de 5) y 7)
	38)	Q	de 5) y 9)
	39)	$\square$	de 5) y 12)

Se generan muchas cláusulas redundantes e irrelevantes:

- 7), 8), 9) y 10) son tautologías
- Su interacción con otras genera más cláusulas redundantes
- P, Q, ¬P y ¬Q se generan repetidas veces

En realidad bastaría con generar las cláusulas 5), 12) y 39)

Estrategias

- La aplicación de la regla de resolución en los sistemas de demostración automática de teoremas tiene variantes.

- La aplicación del procedimiento de saturación, sin limitaciones, genera normalmente muchas cláusulas irrelevantes y redundantes.

- Es necesario aplicar criterios selectivos de forma sistemática que simplifiquen el proceso y lo hagan computacionalmente eficiente.

- Se usarán dos tipos de criterios:
  - **Estrategias de simplificación**: con el objetivo de **reducir el número de cláusulas** en el conjunto
  - **Estrategias de refinamiento**: con el objetivo de **limitar la generación de cláusulas**

Estrategias de simplificación

1)Eliminación de cláusulas idénticas

Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar cláusulas idénticas (obvio)

Conclusión: si se genera una cláusula que ya está en la demostración, no se incluye nuevamente

2) Eliminación de cláusulas tautológicas

Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar las cláusulas tautológicas

Una cláusula tautológica es verdad para cualquier interpretación, por lo que si la borramos de un conjunto de cláusulas insatisfacible, el conjunto seguirá siendo insatisfacible.

***Nota*:** $p \vee \neg p \vee q$ es una cláusula tautológica

Estrategias de Refinamiento (las veremos en LPO)

- **Corrección:** □ se deduce sólo si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible
  (□ → S insatisfacible)
- **Completitud:** Si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible entonces □ se puede deducir
  (S insatisfacible → □)

	Correcta	Completa
Lineal	Si	Si
Input	Si	No, en el caso general
Dirigida	Si	Sí, si el conjunto soporte es satisfacible
Ordenada	Si	No

Ejercicios

- Demostrar, mediante resolución, que la siguiente deducción T[A1, A2] $\vdash$ C es correcta:

  A_1 : $p \rightarrow s \wedge r$
  A_2 : $p \wedge q$

  C : $q \wedge r$

- Demostrar, mediante resolución, la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de clausulas:

  C_1 : $\neg p \vee q \vee r$
  C_2 : $\neg p \vee q \vee s$
  C_3 : t
  C_4 : p
  C_5 : $\neg r \vee t$
  C_6 : $\neg t \vee \neg q$
  C_7 : $\neg t \vee \neg s$

Ejercicios

- Comprobar por el Método de resolución la validez de $T[A_1,A_2,A_3] \vdash C$, siendo:

$$A_1: p \rightarrow q$$
$$A_2: (\neg r \wedge p \wedge s)$$
$$A_3: (\neg t \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg t)$$
$$C: \neg(q \rightarrow t)$$

- Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1,A_2] \vdash B$, siendo:

$$A_1: p \rightarrow q$$
$$A_2: q \rightarrow r$$
$$B: p \rightarrow r$$

Resolución, ejercicio de examen (repesca, enero 2016)

Ejercicio 4. Demostrar por **resolución** que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[\, p \leftrightarrow (\neg q \wedge r) \,,\; r \rightarrow q \,,\; \neg(s \wedge \neg p) \,] \;|\!-\; \neg s$$ *(2,5 puntos)*

C1: $\neg p \vee \neg q$
C2: $\neg p \vee r$
C3: $q \vee \neg r \vee p$
C4: $\neg r \vee q$
C5: $\neg s \vee p$
C6: s

R1: p	C5, C6
R2: $\neg q$	R1, C1
R3: $\neg r$	R2, C4
R4: $\neg p$	R3, C2
R5: $\square$	R1, R4

- Etiqueta bien el ejercicio (clausulas y resolventes) y justifica bien tus respuestas.
- En el examen, no es necesario etiquetar las equivalencias que se van usando, ejemplo: $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. …pero ayuda a detectar fallos.
- Suele ser una buena estrategia empezar por la conclusión (negada) en primer lugar.
- No olvides la conclusión: si llegas a $\square$, clausulas insatisfacibles/la deducción es correcta

Departamento de Inteligencia Artificial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Lógica
Resumen bloque lógica proposicional

Profesor: Emilio Serrano
emilioserra@fi.upm.es

Formalización

¬F	"no F", "no es cierto que F", "no es verdad que F", "no es el caso que F", "nunca F", "jamás F"
F ∧ G	"F y G", "F, pero G", "F, sin embargo G", "F, aunque G", "F, además de G", "A pesar de F, G"
F ∨ G	"F o G", "F y/o G", "F o bien G", "F a no ser que G", "F a menos que G", "F excepto G"
F → G	"si F entonces G", "si F, G", " cuando F, G", "G si F", "G siempre que F", "F sólo si G" "sólo F si G", "no F a menos que G", "F es (condición) suficiente para G", "G es (condición) necesaria para F", "F sólo y únicamente si G", "G es la causa de F", "la causa de F es G"
F ↔ G	"F si y sólo si G", "F es necesario y suficiente para G", "F equivale a G", "F sólo y siempre que G"

- "Si" marca el antecedente de la implicación: Si F, G ≡ F → G
- "Sólo si" marca el consecuente de la implicación: Sólo si F, G ≡ G → F
- "A menos" / "Excepto" / "A no ser que" pueden formalizarse como →, pero la solución con ∨ suele ser menos propensa a errores.

Consecuencia lógica

Argumento correcto:

- Un argumento con premisas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y conclusión B es correcto sii $\mathbf{[A_1,\ldots,A_n] \vDash B}$

- Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:
  1) Ver si ***todas*** las interpretaciones que satisfacen $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisfacen B, o bien
  2) Ver que ***no existe ninguna*** interpretación que satisfaga $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y no satisfaga B

- El caso 1): requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición. En caso positivo, el argumento es correcto.
- El caso 2): podemos centrarnos en definir una interpretación **i** tal que $i(\{A_1,\ldots,A_n\}) = V$ y $i(B) = F$. Si existe, esa interpretación es un contramodelo del argumento y por tanto el argumento no es correcto.

- Ejemplos simples: $p \vDash p$, $\{p,q\} \vDash p$, $\{p,q\} \vDash (p \vee q)$, $p \nvDash \neg p$, $\{p,q\} \nvDash \neg p$.

Semántica

1. ***$i(\neg A) = V$*** *sii $i(A) = F$;*
2. ***$i(A \wedge B) = V$*** *sii $i(A) = V$* y *$i(B) = V$;*
3. ***$i(A \vee B) = V$*** *sii $i(A) = V$* o *$i(B) = V$;*
4. ***$i(A \rightarrow B) = V$*** *sii $i(A) = F$* o *$i(B) = V$;*
5. ***$i(A \leftrightarrow B) = V$*** *sii $i(A) = i(B)=V$ o $i(A) = i(B)=F$; ($i(A) =F$ y*

$i(\neg A) = F$ *sii $i(A) = V$*

$i(A \wedge B) = F$ *sii$i(A) = F$* o *$i(B) = F$*

$i(A \vee B) = F$ *sii$i(A) = F$* y *$i(B) = F$*

$i(A \rightarrow B) = F$ *sii$i(A) = V$* y *$i(B) = F$*

$i(A \leftrightarrow B) = F$ *sii ($i(A) =V$ y $i(B)=F$) o $i(B)=V$)*

NOTAS:

- *Si concluyes que no hay consecuencia lógica ($\not\models$)* ***no olvides dar el contramodelo****: $i(p)=F$, $i(q)=V$… ¡encontrar este contramodelo es la mitad del problema!*
- *Puedes usar llaves para los "o bien" y corchetes para los "y además" que sean complejos. Lo importante es entender que significan para decidir si* $\models$ o $\not\models$ (y que quede claro en el examen que lo entiendes).

Consecuencia lógica: Ejemplo III

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \land q, \neg(p \rightarrow r) \} \vDash q \land (p \rightarrow r)$$

- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  1. $i(p \land q) = V$ sii
     $i(p) = V$ y además **$i(q) = V$**
  2. $i(\neg(p \rightarrow r)) = V$ sii $i(p \rightarrow r) = F$
     $i(p) = V$ y además **$i(r) = F$**
  3. $i(q \land (p \rightarrow r)) = F$ sii
     $i(q) = F$ (pero entonces $i(p \land q) = F$, por lo que no puede ser)
     o bien
     $i(p \rightarrow r) = F$ sii
     $i(p) = V$ y **$i(r) = F$** (compatible con lo requerido por las dos premisas)

- <u>Sí es posible</u> definir un contramodelo del argumento: $i(p) = i(q) = V$, $i(r) = F$, por tanto el argumento no es correcto: **no hay** relación de consecuencia lógica

Semántica, ejercicio de examen

El orden importa, empieza por lo fácil. Y deja claro cuando has encontrado una interpretación final en tu búsqueda de contramodelo.

Comprueba si hay consecuencia lógica

$\{ q \wedge r \rightarrow \neg p, \neg(\neg r \rightarrow s \wedge t), \neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q) \} \vDash s \rightarrow p$

Intenta cerrar opciones según avanzas ("cerrar ramas") y justifícalo en base a las interpretaciones finales

P1: $q \wedge r \rightarrow \neg p$

P2: $\neg(\neg r \rightarrow s \wedge t)$

P3: $\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)$

C: $s \rightarrow p$

$i(C) = F \;\; \wedge \;\; i(Pj) = V \;\; j = 1,2,3$

- $i(C) = i(s \rightarrow p) = F$ sii $\quad$ **$i(s) = V$** y **$i(p) = F$**

$i(P3) = i(\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)) = V$ sii $\quad i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = V$ ó $i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = F$

como $i(p) = F$, entonces $i(\neg p) = V$, entonces

$i(\neg r \wedge q) = V$ sii $i(\neg r) = V$ (**$i(r) = F$**) y **$i(q) = V$**

$i(P1) = i(q \wedge r \rightarrow \neg p) = V \quad$ se cumple porque $i(q \wedge r) = F$ y $i(\neg p) = V$

$i(P2) = i(\neg(\neg r \rightarrow s \wedge t)) = V$ sii $\quad i(\neg r \rightarrow s \wedge t) = F$ sii

$i(\neg r) = V$ (que ya se cumple) y

$i(s \wedge t) = F$ sii $\quad$ **$i(t) = F$**

Justifica la respuesta con el contramodelo o la explicación de por qué no se ha encontrado (también si se usa árboles).

¡No hay consecuencia lógica!, lo demuestra el siguiente contramodelo:

$i(s) = V$ $\quad$ **$i(p) = F$** $\quad$ **$i(r) = F$** $\quad$ **$i(q) = V$** $\quad$ **$i(t) = F$**

Deducción Natural

$I_\wedge$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$E_\wedge$

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$I_\vee$

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

$E_\vee$

$$\frac{A \vee B \quad A \to C \quad B \to C}{C}$$

$I_\to$

$$\frac{A \text{ (supuesto)} \quad B}{A \to B}$$

$E_\to$

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

$I_\leftrightarrow$

$$\frac{A \to B \quad B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

$E_\leftrightarrow$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

$I_\neg$

$$\frac{A \text{ (supuesto)} \quad B \wedge \neg B}{\neg A} \qquad \frac{A \to B \wedge \neg B}{\neg A}$$

$E_\neg$

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Derivadas

- T[A ∧ ¬A] ⊢ B Ex Contradictione Quodlibet
- T[A → B, B → C] ⊢ A → C Transitividad
- T[A → B, ¬B] ⊢ ¬A Modus Tollens
- T[A ∨ B, ¬A] ⊢ BCorte
- T[A ∨ B, ¬B] ⊢ A Corte
- T[A ∨ B, ¬A ∨ C] ⊢ B ∨ C Corte

- + regla de iteración + teorema del intercambio (y equivalencias)

Equivalencias lógicas

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	doble negación
$A \land A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la conjunción
$A \lor A \Leftrightarrow A$	idempotencia con la disyunción
$A \land B \Leftrightarrow B \land A$	conmutatividad de la conjunción
$A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$	conmutatividad de la disyunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$	conmutatividad de la doble implicación
$A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$	asociatividad de la conjunción
$A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$	asociatividad de la disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$	la implicación como disyunción
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	contraposición
$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$	ley de De Morgan
$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$	ley de De Morgan
$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$	distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$	distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$	definición de la doble implicación en función de la implicación

- Se pueden aplicar en los dos sentidos.
- Ejemplo de uso en DN: “Intercambio 3, $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$”.
- No es válido: “equivalencia”, “de Morgan”, “$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$)”, no incluir el número…

Sobre el uso de supuestos

- Un supuesto es una formula temporal añadida a la demostración.
  - no se deduce de lo anterior,
  - pero sirve para demostrar OTRA formula cuando se cancela.
- Se deben abrir con una estrategia, teniendo en cuenta qué se quiere conseguir con él.
- Siempre se deben cancelar, ya sea con $I_{\rightarrow}$ o con $I_{\neg}$
- Por lo tanto, supongo A si:
  - O bien, busco $A \rightarrow B$ (cierro el supuesto al encontrar B, regla $I_{\rightarrow}$)
  - O bien, busco $\neg A$ (cierro al encontrar una contradicción cualquiera $B \wedge \neg B$, regla $I_{\neg}$)
- NUNCA supongo A si busco A (o cualquier otra cosa que no sea $A \rightarrow B$ o $\neg A$)

Estrategia general problemas DN

- Identifica la conectiva principal y el tipo de formula de la conclusión y opera según lo siguiente:
  - Si es $A \rightarrow B$, supón A y usa $\mathbf{I}_{\rightarrow}$ cuando encuentres B.
  - Si es $A \wedge B$, prueba A, prueba B, y usa $\mathbf{I}_{\wedge}$.
  - Si es $A \vee B$, prueba A o B (el más fácil), y usa $\mathbf{I}_{\vee}$.
    - La última estrategia, suponer $\neg(A \vee B)$ puede ser útil.
  - Si es $A \leftrightarrow B$, prueba $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, y aplica $\mathbf{I}_{\leftrightarrow}$
  - Si es $\neg A$, supón A, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.
  - Si es A, intenta encontrar una solución trivial con los elementos previos de la deducción (la $\mathbf{I}_{\vee}$ puede ser útil). Si no lo consigues, supón $\neg$A, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.

  - Si todo falla, supón la conclusión negada en bloque, encuentra una contradicción, y usa $\mathbf{I}_{\neg}$.

  - Si la demostración no tiene premisas, es necesario empezar con un supuesto, ya sea de A para demostrar $\vdash A \rightarrow B$ o bien de $\neg A$ para demostrar $\vdash A$

[A guide to Natural Deduction proofs]

Deducción natural, ejercicio de examen

Demuestra con deducción natural: $T\,[\,p \to (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ ,\ \neg(p \to \neg s) \to t\ \,] \vdash\ p \to (\neg q \to \neg s)$

1. $p \to (q \vee \neg r)$	premisa
2. $\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3. $\neg (p \to \neg s) \to t$	premisa
4. p	supuesto
5. $\neg q$	supuesto
6. $q \vee \neg r$	4 y 1 elim $\to$
7. $\neg r$	5, 6 corte
8. $\neg r \to \neg t$	2 elim. $\leftrightarrow$
9. $\neg t$	7, 8 elim $\to$
10. $\neg\neg(p \to \neg s)$	MT 3, 9
11. $p \to \neg s$	elim $\neg$, 10
12. $\neg s$	4, 11, elim $\to$
13. $\neg q \to \neg s$	5, 12 introd $\to$
14. $p \to (\neg q \to \neg s)$	4, 13 introd $\to$

¡Deja claro cuando empieza y termina un supuesto!, tabulaciones, llaves, etcétera.

¿A qué conclusión queremos llegar?

$\boxed{\vdash\ p \to (\neg q \to \neg s)}$

$\boxed{\neg q \to \neg s}$

$\boxed{\neg s}$

¿Y si no sale ¬s por ningún sitio?
Intentaría suponer su negación, s,
y llegar a una contradicción. ¿Y si tampoco? Probaría suponer ¬(¬q → ¬s), y llegar a una contradicción. ¿Y si tampoco?, etc etc.

¡Las reglas se aplican a rajatabla!, aquí no vale poner directamente p → ¬s

Hacer una simplificación no explícita penalizaría en el ejercicio. Una deducción se puede complicar mucho en base a esto, ejemplo,

$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash (p \vee q)$

La premisa con intercambio y equivalencia de la ley de Morgan daría:

$\neg\neg p \vee \neg\neg q$ (no $p \vee q$ directamente)

En este ejemplo, no puedo aplicar E¬… pero sí podría aplicar intercambio con la equivalencia: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

IMPORTANTE: Siempre que uses una equivalencia pon:

Intercambio, nº donde se aplica, formula con metavariables. Omitir algo de esto penalizaría. Ejemplo: **Intercambio 3, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$**

Formas Normales

Procedimiento para hallar FNC(A) y FND(A). Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:

- Interdefinición (Eliminar bicondicionales y condicionales usando la equivalencia):

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- Leyes de De Morgan (interiorizar negaciones usando equivalencias):

$$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\vdash \neg \neg A \leftrightarrow A$$

- Distribución de $\vee$ y $\wedge$:

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Recuerda que: A, B, C no son literales. Ejemplo, pasa a clausal: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, se puede considerar cualquiera de las formulas conectadas por la disyunción como "A" y aplicar distributiva: $A \vee (p \wedge \neg q)$
- También que la distributiva (como cualquier equivalencia) va en los dos sentidos: $(\neg p \wedge q) \vee (t \wedge \neg p)$, permite "sacar $\neg p$" y dejar $\neg p \wedge (t \vee q)$
- Pasar a forma clausular se simplifica mucho si renombras "trozos" de formulas con A,B,C.

El método de resolución de Robinson

Regla de resolución

$L \vee C1 \qquad \neg L \vee C2$

$C1 \vee C2$

$p \vee \neg q \qquad \neg p \vee q \vee r$

$\neg q \vee q \vee r$

$O: p \vee \neg p \vee r$

Método: Dado un conjunto C de clausulas:

1) Generar el conjunto R de todos los resolventes que pueden obtenerse aplicando la regla de resolución entre clausulas del conjunto C de todas las formas posibles

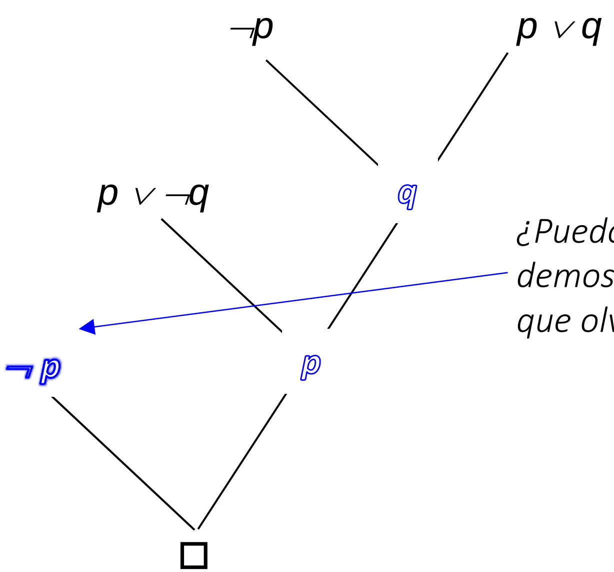
2) Si ☐ está incluida en R entonces terminar ➔ C es insatisfacible

3) Si R $\subseteq$ C significa que ya se han generado todos los resolventes posibles, entonces terminar ➔ C es satisfacible

4) Hacer C = C $\cup$ R y repetir desde 1)

Dos errores típicos y consejos

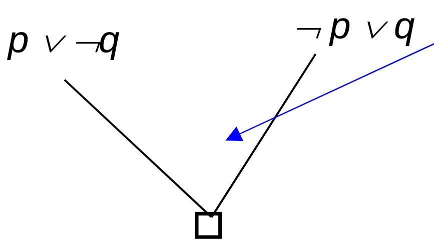
Conjunto de instancias básicas: $\{\neg p,\ p \vee q,\ p \vee \neg q\}$



¿Puedo volver a utilizar la clausula de $\neg p$? Claro, no afecta a la demostración como la iteración no afectaba en Deducción natural. No hay que olvidar que hay una conjunción implícita.

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

Conjunto de instancias básicas: $\{ p \vee \neg q,\ \neg p \vee q\}$



"…porque parece correcto". Pero no lo es. El resolvente es $p \vee \neg p$ o $q \vee \neg q$… pero no la clausula vacía. Si dudas, puedes usar (en sucio) tablas de verdad, árboles de verdad, o búsqueda de contramodelo.

- ❑ No tienes que usar todas las clausulas, lo importante es llegar a la clausula vacía (si es posible).
- ❑ Se permite el pequeño atajo de asumir que $A \vee \neg L$ y $A \vee L$, de A en lugar de $A \vee A$. También aplicar idempotencia en general: $A \vee A \vee B$ equivale a $A \vee B$
- ❑ Busca (y anota en sucio) las clausulas de un solo literal (o de un literal menos) que puedes obtener.
- ❑ El árbol de resolución suele (pero no necesariamente) empezar por las clausulas de la conclusión.

Resolución, ejercicio de examen (repesca, enero 2016)

Ejercicio 4. Demostrar por **resolución** que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[\, p \leftrightarrow (\neg q \land r)\,,\ r \rightarrow q\,,\ \neg(s \land \neg p)\,]\ \vdash\ \neg s$$ *(2,5 puntos)*

C1: $\neg p \lor \neg q$
C2: $\neg p \lor r$
C3: $q \lor \neg r \lor p$
C4: $\neg r \lor q$
C5: $\neg s \lor p$
C6: s

R1: p	C5, C6
R2: $\neg q$	R1, C1
R3: $\neg r$	R2, C4
R4: $\neg p$	R3, C2
R5: $\square$	R1, R4

- ❑ Etiqueta bien el ejercicio (clausulas y resolventes) y justifica bien tus respuestas.
- ❑ En el examen, no es necesario etiquetar las equivalencias que se van usando, ejemplo: $\neg(A \land B) \leftrightarrow \neg A \lor \neg B$. ...pero ayuda a detectar fallos.
- ❑ Suele ser una buena estrategia empezar por la conclusión (negada) en primer lugar.
- ❑ No olvides la conclusión: si llegas a $\square$, clausulas insatisfacibles/la deducción es correcta