

# Lógica Proposicional      Deducción natural

## Ejercicios resueltos - Enunciados

Demostrar con deducción natural:

1.  $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \vdash (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

Fuente: eval LP 1516

2.  $T[p \rightarrow (q \vee \neg r), \neg r \Leftrightarrow \neg t, \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t] \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$

Fuente: examen julio 2015

3.  $T[p \rightarrow \neg t, q \wedge \neg s \rightarrow r, \neg(q \wedge r)] \vdash q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$

Fuente: examen enero 2015

4.  $T[\neg p \vee q, q \vee r \rightarrow s, \neg r \rightarrow p] \vdash s$

Fuente: examen enero 2014

5.  $T[p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q, r \rightarrow \neg s] \vdash \neg s \vee \neg p$

Fuente: eval LP 1415

6.  $\vdash ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$

Fuente: Universidad de Sevilla, examen septiembre 2005

7.  $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \vdash \neg q \vee (p \vee r)$

Fuente: Universidad de Sevilla, examen abril 2005, i

8. Probar  $A \Leftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

---

Demostrar con deducción natural

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \vdash (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

---

eval LP 1516

1-	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	premisa
2-	$p \wedge q$	supuesto
3-	$p \rightarrow r$	supuesto
4-	$p$	elim $\wedge$ 2
5-	$r$	modus ponens 4, 3
6-	$r \vee s$	int $\vee$ 5
7-	$(p \rightarrow r) \rightarrow (r \vee s)$	int $\rightarrow$ 3, 6
8-	$q \rightarrow s$	supuesto
9-	$q$	elim $\wedge$ 2
10-	$s$	modus ponens 9, 8
11-	$r \vee s$	int $\vee$ 10
12-	$(q \rightarrow s) \rightarrow (r \vee s)$	int $\rightarrow$ 8, 11
13-	$r \vee s$	elim $\vee$ 1, 7, 12
14-	$p \wedge q \rightarrow r \vee s$	int $\rightarrow$ 2, 13

Para hacerlo un poco más comprensible se puede añadir:

3-  $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$  iteración 1

Demostrar mediante **deducción natural**

$$T [ p \rightarrow (q \vee \neg r) , \neg r \leftrightarrow \neg t , \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t ] \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$$

Fuente: examen julio 2015

\*) Esquema de la demostración:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	$p$	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
.....	.....	
.....	.....	
17 -	$\neg s$	
18 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 17
19 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,18

\*) Demostración completa:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	$p$	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
6 -	$q \vee \neg r$	modus ponens 4,1
7 -	$\neg r$	corte 5,7
8 -	$\neg r \rightarrow \neg t$	elim $\leftrightarrow$ 2
9 -	$\neg t$	modus ponens 7,8
10 -	$\neg \neg(p \rightarrow \neg s)$	modus tollens 9,3
11 -	$p \rightarrow \neg s$	doble negación 10
12 -	$\neg s$	modus ponens 4, 11
13 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 12
14 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,13

Demostrar mediante **deducción natural**, justificando adecuadamente cada uno de los pasos dados, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[p \rightarrow \neg t, q \wedge \neg s \rightarrow r, \neg(q \wedge r)] \vdash q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$$

Fuente: examen enero 2015

• 1ª forma:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
5.	$p$	supuesto
6.	$\neg t$	m. p. 5,1
7.	$t$	elim $\wedge$ 4
8.	$t \wedge \neg t$	int $\wedge$ 6,7
9.	$\neg p$	int $\neg$ 5, 8
10.	$\neg s$	supuesto
11.	$q$	elim $\wedge$ 4
12.	$q \wedge \neg s$	int $\wedge$ 10,11
13.	$r$	modus ponens 12,2
14.	$\neg q \vee \neg r$	De Morgan $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ 3, th intercambio
15.	$\neg q$	corte 13, 14
16.	$q \wedge \neg q$	int $\wedge$ 11,15
17.	$\neg \neg s$	int $\neg$ 10, 16
18.	$s$	elim $\neg$ 17
19.	$\neg p \wedge s$	int $\wedge$ 9, 18
20.	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	int $\rightarrow$ 4, 19

\*) justificación:

- puesto que hay que demostrar una implicación, SIEMPRE, “supongamos el antecedente”:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
	.....	
	.....	
	.....	
	.....	
	.....	
n.	$\neg p \wedge s$	
n+1.	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	int $\rightarrow$ 4, n

- puesto que ahora hay que demostrar una conjunción:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
	.....	
	.....	
	.....	
j.	$\neg p$	
	.....	
	.....	
	.....	
k.	$s$	
	$\neg p \wedge s$	
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	$\text{int } \wedge j, k$

- y  $\neg p$  y  $s$  se demuestran por contradicción:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
	$q \wedge t$	supuesto
	$p$	supuesto
	.....	
	.....	
	.....	
	$\neg p$	
	$\neg s$	
	.....	
	.....	
	.....	
	.....	
	$\neg \neg s$	
	$s$	
	$\neg p \wedge s$	
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	

• 2ª solución:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
5.	$t$	elim $\wedge$ 4
6.	$\neg \neg t$	th intercambio en 5 y equivalencia $\neg \neg A \equiv A$
7.	$\neg p$	modus tollens 1,6
8.	$\neg q \vee \neg r$	th intercambio en 3 y De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
9.	$q$	elim 4
10.	$\neg r$	corte 8,9
11.	$\neg(q \wedge \neg s)$	modus tollens 2,10
12.	$\neg q \vee \neg \neg s$	th intercambio en 11 y De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
13.	$\neg q \vee s$	th intercambio en 12 y equivalencia $\neg \neg A \equiv A$
14.	$s$	corte 9,13
15.	$\neg p \wedge s$	int $\wedge$ 7,14
16.	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	int $\rightarrow$ 4,15

- 3ª forma:

1.	$p \rightarrow \neg t$	premisa
2.	$q \wedge \neg s \rightarrow r$	premisa
3.	$\neg(q \wedge r)$	premisa
4.	$q \wedge t$	supuesto
5.	$\neg(\neg p \wedge s)$	supuesto
	$p \vee \neg s$	De Morgan + doble negación
	$p$	supuesto
	....	
	....	
	....	
	A	
	.....	
	.....	
	$\neg A$	
	$\neg s$	supuesto
	.....	
	.....	
	B	
	.....	
	$\neg B$	
	$\neg p \wedge s$	
	$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$	
	$\longrightarrow$	
	$A \vee B$	
	$A \vdash C \wedge \neg C$	
	$B \vdash D \wedge \neg D$	
	$\left. \begin{array}{l} A \vee B \\ A \vdash C \wedge \neg C \\ B \vdash D \wedge \neg D \end{array} \right\} \Rightarrow \neg(A \vee B)$	

---

Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$\top [\neg p \vee q, q \vee r \rightarrow s, \neg r \rightarrow p] \vdash s$$

---

Fuente: examen enero 2014

- |    |                          |  |
|----|--------------------------|--|
| 1. | $\neg p \vee q$          | premisa  |
| 2. | $q \vee r \rightarrow s$ | premisa  |
| 3. | $\neg r \rightarrow p$   | premisa  |
| 4. | $\neg \neg r \vee p$     | Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ |
| 5. | $r \vee p$               | Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg \neg A$                 |
| 6. | $q \vee r$               | Regla derivada de corte 1,5  |
| 7. | $s$                      | Modus Ponens 2,6   |

2ª solución:

- |      |                          |   |
|------|--------------------------|---|
| 1 -  | $\neg p \vee q$          | premisa   |
| 2 -  | $q \vee r \rightarrow s$ | premisa   |
| 3 -  | $\neg r \rightarrow p$   | premisa   |
| 4 -  | $\neg s$                 | supuesto  |
| 5 -  | $\neg(q \vee r)$         | modus tollens 4,2   |
| 6 -  | $\neg q \wedge \neg r$   | De Morgan 5 con th intercambio $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ |
| 7 -  | $\neg r$                 | elim $\wedge$ 6   |
| 8 -  | $p$                      | modus ponens 7,3  |
| 9 -  | $q$                      | corte 8,1   |
| 10 - | $\neg q$                 | elim $\wedge$ 6   |
| 11 - | $q \wedge \neg q$        | int $\wedge$ 9,10   |
| 12 - | $\neg \neg s$            | int $\neg$ 4, 11  |
| 13 - | $s$                      | elim $\neg$ 12  |



---

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso.

$$\top [ p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q, r \rightarrow \neg s ] \vdash \neg s \vee \neg p$$

---

Fuente: eval LP 1415

- |     |                             |   |
|-----|-----------------------------|---|
| 1.  | $p \rightarrow q$           | premisa   |
| 2.  | $\neg r \rightarrow \neg q$ | premisa   |
| 3.  | $r \rightarrow \neg s$      | premisa   |
| 4.  | $s$                         | supuesto  |
| 5.  | $p$                         | supuesto  |
| 6.  | $q$                         | modus ponens 1,5  |
| 7.  | $\neg \neg q$               | teorema de intercambio con la equivalencia $A \equiv \neg \neg A$                 |
| 8.  | $\neg \neg r$               | modus tollens 2,7   |
| 9.  | $r$                         | $E\neg$ 8   |
| 10. | $\neg s$                    | modus ponens 3,9  |
| 11. | $s \wedge \neg s$           | $I\wedge$ 4,10  |
| 12. | $\neg p$                    | $I\neg$ 5,11  |
| 13. | $s \rightarrow \neg p$      | $I\rightarrow$ 4,12   |
| 14. | $\neg s \vee \neg p$        | teorema de intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ |

Demostrar con deducción natural

$$\vdash ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$$

Fuente: Universidad de Sevilla, examen septiembre 2005

1-	$(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p$	supuesto
2-	$\neg p$	supuesto
3-	$\neg(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$	modus tollens 2,1
4-	$\neg(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$	T. intercambio 3, con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
5-	$\neg \neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	De Morgan 4 $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ con t. intercambio
6-	$\neg \neg p$	elim $\wedge$ 5
7-	$p$	elim $\neg$ 6
8-	$\neg p$	iteración 2
9-	$p \wedge \neg p$	int $\wedge$ 7,8
10-	$\neg \neg p$	int $\neg$ 2, 9
11-	$p$	elim $\neg$ 10
	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	int $\rightarrow$ 1, 11

\*) Comprobación con tablas de verdad:

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$A \equiv ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p)$	$A \rightarrow p$
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
F	...	...	V	F	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V
V	...	...	...	...	V

(  $\Rightarrow$  NO HACE FALTA llenar toda la tabla )

---

Demostrar con deducción natural

$$((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \vdash \neg q \vee (p \vee r)$$

---

Fuente: Universidad de Sevilla, examen abril 2005, i

1-	$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg p \wedge r$	premisa
2-	$\neg(\neg q \vee p \vee r)$	supuesto
3-	$\neg\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 2 con $\neg(A \vee B \vee C) \equiv \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
4-	$q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 3 con $\neg\neg A \equiv A$
5-	$\neg p$	eliminación $\wedge$ 3
6-	$\neg p \vee \neg q$	introducción $\vee$ 5
7-	$\neg p \wedge r$	modus ponens 1,6
8-	$r$	eliminación $\wedge$ 7
9-	$\neg r$	eliminación $\wedge$ 3
10-	$r \wedge \neg r$	int $\wedge$ 8,9
11-	$\neg\neg(\neg q \vee p \vee r)$	introducción $\neg$ 2,10
12-	$\neg q \vee p \vee r$	eliminación $\neg$ 11

---


$$A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$


---

\*) Lo que se pide demostrar es cierto, analizando el significado de las dos fórmulas que aparecen en la deducción:  $A$  y  $B$  son equivalentes sii  $A$  y  $B$  son o verdaderos o falsos al mismo tiempo, que es lo que dice textualmente la fórmula  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1 -	$A \leftrightarrow B$		premisa
2 -	$A \rightarrow B$		elim $\leftrightarrow$ 1
3 -	$B \rightarrow A$		elim $\leftrightarrow$ 1
4 -		$\neg ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	supuesto
5 -		$\neg (A \wedge B) \wedge \neg (\neg A \wedge \neg B)$	De Morgan 4
6 -		$(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$	De Morgan 5
7 -		$A \vee B$	elim $\wedge$ 6
8 -		$A$	supuesto
9 -		$B$	modus ponens 8, 2
10 -		$B$	supuesto
11 -		$B$	iteración 10
12 -		$B$	elim $\vee$ 7, 8-9, 10-11
13 -		$\neg A \vee \neg B$	elim $\wedge$ 6
14 -		$\neg A$	supuesto
15 -		$\neg B$	modus tollens, 14, 3
16 -		$\neg B$	supuesto
17 -		$\neg B$	iteración 16
18 -		$\neg B$	elim $\vee$ 13, 14-15, 16-17
19 -	$\neg \neg ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$		int $\neg$ 4, 12, 18
20 -	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$		elim $\neg$ 19