

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. a) ~~Obtener la forma clausular del siguiente conjunto de fórmulas:~~

$$\{p \wedge q \rightarrow r, s \vee q \rightarrow p, \neg(\neg q \wedge \neg s), p \rightarrow \neg r, p \rightarrow q\}$$

- b) Demostrar mediante resolución que el conjunto de cláusulas obtenido es insatisfacible.

(examen final julio 2017)

2. Demostrar, utilizando el método de resolución, que:

$$T [p \leftrightarrow \neg t, p \vee \neg(q \vee r), p \rightarrow s, \neg(q \vee s \rightarrow \neg r \wedge s)] \vdash s \wedge \neg t$$

(repesca LP enero 2017)

3. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [t \rightarrow p, r \vee \neg r \rightarrow s, \neg((p \wedge s) \vee q)] \vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge (t \vee \neg s)$$

(eval LP 1516)

4. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [r \wedge (\neg s \vee \neg t), p \rightarrow (q \rightarrow s), u \vee (p \wedge \neg q \wedge r), \neg(s \wedge \neg t) \vee \neg p] \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge r$$

(examen julio 2014)

5. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [\neg p \leftrightarrow (q \rightarrow r), \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t), p \vee t \rightarrow \neg p] \vdash \neg p \wedge (\neg t \vee r)$$

(examen enero 2015)

a) ~~Obtener la forma clausular del siguiente conjunto de fórmulas:~~

$$\{p \wedge q \rightarrow r, s \vee q \rightarrow p, \neg(\neg q \wedge \neg s), p \rightarrow \neg r, p \rightarrow q\}$$

b) Demostrar mediante resolución que el conjunto de cláusulas obtenido es insatisfacible.

Examen julio 2017

Forma clausular:

C1. $\neg p \vee \neg q \vee r$

C2. $p \vee \neg s$

C3. $p \vee \neg q$

C4. $q \vee s$

C5. $\neg p \vee \neg r$

C6. $\neg p \vee q$

Resolución:

R1. $p \vee s$ (C3,C4)

R2. p (C2,R1)

R3. $\neg q \vee r$ (C1,C3)

R4. $\neg r$ (C5,R2)

R5. $\neg q$ (R3,R4)

R6. $\neg p$ (C6,R5)

R7. \square (R2,R6)

Demostrar, utilizando el método de resolución, que:

$$T \ [p \leftrightarrow \neg t, p \vee \neg(q \vee r), p \rightarrow s, \neg(q \vee s \rightarrow \neg r \wedge s)] \vdash s \wedge \neg t$$

Fuente: repesca LP enero 2017

Hay que demostrar que el conjunto de fórmulas $\{A1, A2, A3, A4, \neg B\}$ es insatisfacible deduciendo la clausula vacía. Transformamos cada fórmula a su forma normal conjuntiva:

A1: $p \leftrightarrow \neg t$

$$(p \rightarrow \neg t) \wedge (\neg t \rightarrow p)$$

$$(\neg p \vee \neg t) \wedge (\neg \neg t \vee p)$$

$$(\neg p \vee \neg t) \wedge (t \vee p)$$

$$FC_A1 = \{ \neg p \vee \neg t, t \vee p \}$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg \neg A \equiv A$$

cláusulas 1 y 2

A2: $p \vee \neg(q \vee r)$

$$p \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)$$

$$FC_A2 = \{ p \vee \neg q, p \vee \neg r \}$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

cláusulas 3 y 4

A3: $p \rightarrow s$

$$\neg p \vee s$$

$$FC_A3 = \{ \neg p \vee s \}$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

cláusula 5

A4: $\neg(q \vee s \rightarrow \neg r \wedge s)$

$$\neg(\neg(q \vee s) \vee (\neg r \wedge s))$$

$$\neg \neg(q \vee s) \wedge \neg(\neg r \wedge s)$$

$$(q \vee s) \wedge \neg(\neg r \wedge s)$$

$$(q \vee s) \wedge (\neg \neg r \vee \neg s)$$

$$(q \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$$

$$FC_A4 = \{ q \vee s, r \vee \neg s \}$$

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg \neg A \equiv A$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg \neg A \equiv A$$

cláusulas 6 y 7

$\neg B: \neg(s \wedge \neg t)$

$$\neg s \vee \neg \neg t$$

$$\neg s \vee t$$

$$FC_B = \{ \neg s \vee t \}$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg \neg A \equiv A$$

cláusula 8

Forma clausular de la estructura deductiva: $\{\neg p \vee \neg t, t \vee p, p \vee \neg q, p \vee \neg r, \neg p \vee s, q \vee s, r \vee \neg s, \neg s \vee t\}$

$$C1: \neg p \vee \neg t$$

$$C2: t \vee p$$

$$C3: p \vee \neg q$$

$$C4: p \vee \neg r$$

$$C5: \neg p \vee s$$

$$C6: q \vee s$$

$$C7: r \vee \neg s$$

$$C8: \neg s \vee t$$

R1: $\neg p \vee t$	C8 y C5
R2: $\neg p \vee \neg p$	R1 y C1
R3: $\neg r$	R2 y C4
R4: $\neg s$	C7 y R3
R5: q	R4 y C6
R6: $\neg q$	R2 y C3
\square	R5 y R6

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [t \rightarrow p , r \vee \neg r \rightarrow s , \neg ((p \wedge s) \vee q)] \vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg (p \vee q) \wedge (t \vee \neg s)$$

Fuente: eval LP 1516

*) Transformar a forma clausular:

$$A1. \quad t \rightarrow p \equiv (\text{eliminación de } \rightarrow) \quad \neg t \vee p \quad (\text{clausula 1})$$

$$A2. \quad r \vee \neg r \rightarrow s \equiv (\text{eliminación de } \rightarrow) \quad \neg (r \vee \neg r) \vee s \equiv (\text{DeMorgan})$$

$$(\neg \neg r \wedge \neg r) \vee s \equiv (\text{elim } \neg \neg) \quad (r \wedge \neg r) \vee s \equiv (\text{distributividad})$$

$$(\neg r \vee s) \wedge (r \vee s) \quad (\text{clausulas 2 y 3})$$

$$A3. \quad \neg ((p \wedge s) \vee q) \equiv \neg (p \wedge s) \wedge \neg q \equiv (\text{DeMorgan})$$

$$(\neg p \vee \neg s) \wedge \neg q \quad (\text{clausulas 4 y 5})$$

$$\neg C. \quad \neg (\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg (p \vee q) \wedge \neg (t \vee \neg s)) \equiv (\text{eliminación de } \rightarrow)$$

$$\neg (\neg (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg (p \vee q) \wedge \neg (t \vee \neg s))) \equiv (\text{DeMorgan})$$

$$\neg \neg (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg (\neg (p \vee q) \wedge \neg (t \vee \neg s)) \equiv (\text{elim } \neg \neg)$$

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg (\neg (p \vee q) \wedge \neg (t \vee \neg s)) \equiv (\text{DeMorgan})$$

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg \neg (p \vee q) \vee \neg \neg (t \vee \neg s)) \equiv (\text{elim } \neg \neg)$$

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee t \vee \neg s) \quad (\text{clausulas 6 y 7})$$

*) Resolución:

$$C1. \quad \neg t \vee p$$

$$C2. \quad \neg r \vee s$$

$$C3. \quad r \vee s$$

$$C4. \quad \neg p \vee \neg s$$

$$C5. \quad \neg q$$

C6. $\neg p \vee \neg q$

C7. $p \vee q \vee t \vee \neg s$

C8. $p \vee t \vee \neg s$ desde C7 con C5 (corte)

C9. $p \vee p \vee \neg s$ desde C8 con C1 (corte)

C10. $p \vee \neg s$ desde C9 (idempotencia)

C11. $\neg s \vee \neg s$ desde C10 con C4 (corte)

C12. $\neg s$ desde C11 (idempotencia)

C13. $s \vee s$ desde C2 con C3 (corte)

C14. s desde C13 (idempotencia)

C15. \square desde C12 con C14 (corte)

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [r \wedge (\neg s \vee \neg t) , p \rightarrow (q \rightarrow s) , u \vee (p \wedge \neg q \wedge r) , \neg (s \wedge \neg t) \vee \neg p] \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge r$$

Forma clausular de la estructura deductiva:

C1: r

C2: $\neg s \vee \neg t$

C3: $\neg p \vee \neg q \vee s$

C4', C4'', C4''' : $u \vee p ; u \vee \neg q ; u \vee r$ (no se usan en el proceso de resolución)

C4: $\neg s \vee t \vee \neg p$

negación de la conclusión: $\neg ((\neg p \vee \neg q) \wedge r)$ es $(p \wedge q) \vee \neg r$

C5: $(p \vee \neg r)$

C6: $(q \vee \neg r)$

C7: p desde C1 con C5

C8: q desde C1 con C6

C9: $\neg q \vee s$ desde C3 con C7

C10: s desde C9 con C8

C11: $t \vee \neg p$ desde C4 con C10

C12: $\neg t$ desde C2 con C10

C13: $\neg p$ desde C11 con C12

C14: \square desde C7 con C13

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [\neg p \leftrightarrow (q \rightarrow r), \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t), p \vee t \rightarrow \neg p] \vdash \neg p \wedge (\neg t \vee r)$$

Fuente: examen enero 2015

$$\begin{array}{ccccccc} T [\neg p \leftrightarrow (q \rightarrow r), \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t), p \vee t \rightarrow \neg p] & \vdash & \neg p \wedge (\neg t \vee r) \\ A1 & & A2 & & A3 & & B \end{array}$$

- Forma clausular:

$$\begin{aligned} - A1 &\equiv \neg p \leftrightarrow (q \rightarrow r) \\ &\equiv \neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow \neg p \\ &\equiv (p \vee (q \rightarrow r)) \wedge (\neg (q \rightarrow r) \vee \neg p) \\ &\equiv (p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg (\neg q \vee r) \vee \neg p) \\ &\equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg p) \\ &\equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \end{aligned}$$

$$- A2 \equiv \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t) \equiv q \vee (r \vee \neg t)$$

$$\begin{aligned} - A3 &\equiv p \vee t \rightarrow \neg p \equiv \neg (p \vee t) \vee \neg p \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee \neg p \\ &\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg t \vee \neg p) \\ &\equiv \neg p \vee (\neg t \vee \neg p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \neg B &\equiv \neg (\neg p \wedge (\neg t \vee r)) \equiv p \vee \neg (\neg t \vee r) \\ &\equiv p \vee (t \wedge \neg r) \\ &\equiv (p \vee t) \wedge (p \vee \neg r) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow FC = \{ \underset{1}{p \vee \neg q \vee r}, \underset{2}{q \vee \neg p}, \underset{3}{\neg r \vee \neg p}, \underset{4}{q \vee r \vee \neg t}, \underset{5}{\neg p}, \underset{6}{\neg t \vee \neg p}, \underset{7}{p \vee t}, \underset{8}{p \vee \neg r} \}$$

- Obtención de la cláusula vacía por resolución

$$\begin{array}{ll} 9 \equiv t & (5,7) \\ 10 \equiv \neg r & (5,8) \\ 11 \equiv p \vee \neg q & (1,10) \\ 12 \equiv \neg q & (5,11) \\ 13 \equiv r \vee \neg t & (4,12) \\ 14 \equiv r & (9,13) \\ 15 \equiv \square & (10,14) \end{array}$$