

**Ejercicios resueltos - Enunciados**

1. Dado el siguiente conjunto de fórmulas: (\*)

$$\{ \neg( (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p ) , \neg p \wedge \neg s \rightarrow \neg r , \neg(\neg r \wedge s) \}$$

(a) Obtener la forma clausular del conjunto de formulas.

(b) Analizar mediante resolución si el conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

2. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [ r \wedge (\neg s \vee \neg t) , p \rightarrow (q \rightarrow s) , u \vee (p \wedge \neg q \wedge r) , \neg (s \wedge \neg t) \vee \neg p ] \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge r \quad (*)$$

3. Estudiar, utilizando el método de resolución, si  $T [ A1 , A2 ] \vdash B$  siendo:

$$A_1: p \rightarrow \neg q \wedge r$$

$$A_2: (r \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow p)$$

$$B: \neg s$$

4. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [ \neg s \wedge (r \rightarrow t) , \neg r \rightarrow (p \rightarrow q) , t \rightarrow \neg r ] \vdash \neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p) \quad (*)$$

5. Demostrar utilizando el método de resolución:

$$\{ p \rightarrow u , q \rightarrow u , r \rightarrow u , s \rightarrow u , t \rightarrow u \} \models B \quad \text{donde la fórmula B es:}$$

a)  $B: p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \rightarrow u$

b)  $B: p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow u$

(\*)    estos ejercicios se pusieron alguna vez en alguna evaluación

---

Dado el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\{ \neg( (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p ) , \neg p \wedge \neg s \rightarrow \neg r , \neg(\neg r \wedge s) \}$$

- (a) Obtener la forma clausular del conjunto de formulas.  
(b) Analizar mediante resolución si el conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.
- 

(a)  $\neg( (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p )$

$$\neg(\neg(\neg p \rightarrow q) \vee p)$$

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

$$(p \vee q) \wedge \neg p$$

$$\neg p \wedge \neg s \rightarrow \neg r$$

$$\neg(\neg p \wedge \neg s) \vee \neg r$$

$$p \vee s \vee \neg r$$

$$\neg(\neg r \wedge s)$$

$$r \vee \neg s$$

$$\text{Forma clausular} = \{ p \vee q, \neg p, p \vee s \vee \neg r, r \vee \neg s \}$$

(b) Resolución:

$$C1: p \vee q, C2: \neg p, C3: p \vee s \vee \neg r, C4: r \vee \neg s$$

Resolventes obtenidos del conjunto  $\{C1, C2, C3, C4\}$

$$R1: q \quad (C1, C2)$$

$$R2: s \vee \neg r \quad (C2, C3)$$

$$R3: p \vee s \vee \neg s \quad (C3, C4)$$

$$R4: p \vee r \vee \neg r \quad (C3, C4)$$

Ninguno de estos resolventes es la cláusula vacía y no estaban en el conjunto de partida, por lo que seguimos generando nuevos resolventes, ahora del conjunto:  $\{C1, C2, C3, C4\} \cup \{R1, R2, R3, R4\}$

$$R5: s \vee \neg s \quad (R2, C4)$$

$$R6: r \vee \neg r \quad (R2, C4)$$

$$R7: p \vee r \vee \neg s \quad (R3, C4)$$

Sigue sin deducirse la cláusula vacía, por lo que seguimos buscando nuevos resolventes, ahora del conjunto:  $\{C1, C2, C3, C4, R1, R2, R3, R4\} \cup \{R5, R6, R7\}$

Ya no pueden generarse resolventes nuevos y no hemos deducido la cláusula vacía, por lo que el conjunto de cláusulas es **satisfacible**.

---

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [ r \wedge (\neg s \vee \neg t) , p \rightarrow (q \rightarrow s) , u \vee (p \wedge \neg q \wedge r) , \neg (s \wedge \neg t) \vee \neg p ] \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge r$$

---

Forma clausular de la estructura deductiva:

C1:  $r$

C2:  $\neg s \vee \neg t$

C3:  $\neg p \vee \neg q \vee s$

C4', C4'', C4''' :  $u \vee p ; u \vee \neg q ; u \vee r$  (no se usan en el proceso de resolución)

C4:  $\neg s \vee t \vee \neg p$

negación de la conclusión:  $\neg ( (\neg p \vee \neg q) \wedge r )$  es  $(p \wedge q) \vee \neg r$

C5:  $(p \vee \neg r)$

C6:  $(q \vee \neg r)$

C7:  $p$  desde C1 con C5

C8:  $q$  desde C1 con C6

C9:  $\neg q \vee s$  desde C3 con C7

C10:  $s$  desde C9 con C8

C11:  $t \vee \neg p$  desde C4 con C10

C12:  $\neg t$  desde C2 con C10

C13:  $\neg p$  desde C11 con C12

C14:  $\square$  desde C7 con C13

---

Estudiar, utilizando el método de resolución, si  $T[A_1, A_2] \vdash B$  siendo:

$$A_1: p \rightarrow \neg q \wedge r$$

$$A_2: (r \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow p)$$

$$B: \neg s$$

---

Para comprobarlo tenemos que comprobar si  $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B$  es insatisfacible. En caso de que sea insatisfacible, existirá relación de consecuencia lógica en el razonamiento inicial.

Pasamos las fórmulas a forma clausular.

$$A_1: p \rightarrow \neg q \wedge r$$

$$p \rightarrow \neg q \wedge r$$

$$\neg p \vee (\neg q \wedge r)$$

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A_2: (r \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow p)$$

$$(r \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow p)$$

$$(\neg r \vee q) \wedge (s \rightarrow p)$$

$$(\neg r \vee q) \wedge (\neg s \vee p)$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$B: \neg s$$

$$\neg B: \neg \neg s$$

$$s$$

$$\neg \neg A \leftrightarrow A$$

$$FC = \{ C_1: \neg p \vee \neg q, C_2: \neg p \vee r, C_3: \neg r \vee q, C_4: \neg s \vee p, C_5: s \}$$

Una vez que tenemos las fórmulas en forma clausular, aplicamos resolución:

$$\text{Res}(C_4, C_5) = p = R_1$$

$$\text{Res}(C_2, R_1) = r = R_2$$

$$\text{Res}(C_1, R_1) = \neg q = R_3$$

$$\text{Res}(C_3, R_2) = q = R_4$$

$$\text{Res}(R_3, R_4) = \square = R_5$$

Aplicando el método de resolución hemos conseguido llegar a la cláusula vacía, con lo que el conjunto  $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B$  es insatisfacible. Por reducción al absurdo el conjunto  $A_1 \wedge A_2 \wedge B$  es satisfacible, con lo que **existe relación de consecuencia lógica**.

---

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de Resolución:

$$T [ \neg s \wedge (r \rightarrow t), \neg r \rightarrow (p \rightarrow q), t \rightarrow \neg r ] \quad \vdash \quad \neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p)$$

---

$$\begin{array}{ccccccc} T [ \neg s \wedge (r \rightarrow t), \neg r \rightarrow (p \rightarrow q), t \rightarrow \neg r ] & \vdash & \neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p) \\ A1 & & A2 & & A3 & & B \end{array}$$

- Forma Normal Conjuntiva de premisas y de negación de la conclusión:

FNC de A1:  $\neg s \wedge (\neg r \vee t)$  (interdefinición de  $\rightarrow$ )

FNC de A2:  $\neg \neg r \vee (p \rightarrow q)$  (interdefinición de  $\rightarrow$ )  $\equiv r \vee (p \rightarrow q)$  (doble negación)  $\equiv$   
 $\equiv r \vee (\neg p \vee q)$  (interdefinición de  $\rightarrow$ )  $\equiv r \vee \neg p \vee q$  (asociatividad)

FNC de A3:  $\neg t \vee \neg r$  (interdefinición de  $\rightarrow$ )

FNC de  $\neg B$ :  $\neg (\neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p)) \equiv \neg \neg s \vee \neg \neg (\neg q \wedge p)$  (De Morgan)  $\equiv$   
 $\equiv s \vee (\neg q \wedge p)$  (eliminación de  $\neg$ )  $\equiv (s \vee \neg q) \wedge (s \vee p)$  (distributividad)

- Forma Clausular (FC) de  $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge \neg B$ :

$$\{ \neg s, \neg r \vee t, r \vee \neg p \vee q, \neg t \vee \neg r, s \vee \neg q, s \vee p \}$$

- Resolución:

1.  $\neg s$
2.  $\neg r \vee t$
3.  $r \vee \neg p \vee q$
4.  $\neg t \vee \neg r$
5.  $s \vee \neg q$
6.  $s \vee p$
  
7.  $\neg q$  (de C1 y C5)
8.  $p$  (de C1 y C6)
9.  $r \vee \neg p$  (de C3 y C7)
10.  $r$  (de C9 y C8)
11.  $t$  (de C10 y C2)
12.  $\neg t$  (de C10 y C4)
13.  $\square$  (de C11 y C12)

---

Demostrar utilizando el método de resolución:

$\{ p \rightarrow u, q \rightarrow u, r \rightarrow u, s \rightarrow u, t \rightarrow u \} \models B$  donde la fórmula B es:

a) B:  $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \rightarrow u$

b) B:  $p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow u$

---

a) \*) Forma clausular:

$$\neg B \equiv \neg (\neg(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t) \vee u) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \wedge \neg u$$

$$\longrightarrow FC = \{ \underbrace{\neg p \vee u}_{C1}, \underbrace{\neg q \vee u}_{C2}, \underbrace{\neg r \vee u}_{C3}, \underbrace{\neg s \vee u}_{C4}, \underbrace{\neg t \vee u}_{C5}, p, q, r, s, t, \neg u \}$$

\*) Resolución:

$$R1 \equiv \neg p \quad C1, \neg u$$

$$R2 \equiv \square \quad R1, p$$

b) \*) Forma clausular:

$$\neg B \equiv \neg (\neg(p \vee q \vee r \vee s \vee t) \vee u) \equiv (p \vee q \vee r \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

$$\longrightarrow FC = \{ \underbrace{\neg p \vee u}_{C1}, \underbrace{\neg q \vee u}_{C2}, \underbrace{\neg r \vee u}_{C3}, \underbrace{\neg s \vee u}_{C4}, \underbrace{\neg t \vee u}_{C5}, p \vee q \vee r \vee s \vee t, \neg u \}$$

\*) Resolución:

$$R1 \equiv \neg p \quad C1, \neg u$$

$$R2 \equiv q \vee r \vee s \vee t \quad R1, p \vee q \vee r \vee s \vee t$$

$$R3 \equiv \neg q \quad C2, \neg u$$

$$R4 \equiv r \vee s \vee t \quad R3, R2$$

$$R5 \equiv \neg r \quad C3, \neg u$$

$$R6 \equiv s \vee t \quad R5, R4$$

$$R7 \equiv \neg s \quad C4, \neg u$$

$$R8 \equiv t \quad R7, R6$$

$$R9 \equiv \neg t \quad C5, \neg u$$

$$R10 \equiv \square \quad R9, R8$$