Lógica   Curso 2016-17   Resolución en LP

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

   $$T\,[\, t \rightarrow p \;,\; r \vee \neg r \rightarrow s \,,\, \neg\,(\,(p \wedge s\,) \vee q\,)\,] \;\vdash\; \neg p \vee \neg q \;\rightarrow\; \neg(p \vee q) \wedge (t \vee \neg s)$$

2. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

   $$T\,[\, r \wedge (\neg s \vee \neg t)\,,\; p \rightarrow (q \rightarrow s)\,,\, u \vee (p \wedge \neg q \wedge r)\,,\, \neg\,(s \wedge \neg t) \vee \neg p\,] \;\vdash\; (p \rightarrow \neg q) \wedge r$$

3. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

   $$T\,[\neg p \leftrightarrow (q \rightarrow r)\,,\, \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t)\,,\; p \vee t \rightarrow \neg p\,] \;\vdash\; \neg p \wedge (\neg t \vee r)$$

4. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

   $$T\,[\,\neg\, s \wedge (\, r \rightarrow t\,)\,,\, \neg\, r \rightarrow (\, p \rightarrow q)\;,\; t \rightarrow \neg\, r\,] \;\vdash\; \neg\, s \wedge \neg\,(\neg\, q \wedge p\,)$$

5. Demostrar, justificando los pasos dados, que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

   $$T\,[\, p \rightarrow (q \vee \neg\, r),\, \neg\, r \leftrightarrow \neg\, s,\, \neg\,(q \wedge (p \rightarrow r))\,] \;\vdash\; p \rightarrow (\neg\, q \rightarrow \neg\, s)$$

NOTA: Todos estos ejercicios corresponden a evaluaciones recientes.

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T\ [\ t \rightarrow p\ ,\ r \vee \neg r \rightarrow s\ ,\ \neg\ (\ (p \wedge s\ ) \vee q\ )\ ]\ \vdash\ \neg p \vee \neg q\ \rightarrow\ \neg(p \vee q) \wedge (t \vee \neg s)$$

Fuente: eval LP 1516

*) Transformar a forma clausular:

A1. $t \rightarrow p\ \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg t \vee p$ (clausula 1)

A2. $r \vee \neg r \rightarrow s\ \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg(r \vee \neg r) \vee s\ \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg\neg r \wedge \neg r) \vee s \equiv$ (elim $\neg\neg$) $(r \wedge \neg r) \vee s \equiv$ (distributividad)

$(\neg r \vee s) \wedge (r \vee s)$ (clausulas 2 y 3)

A3. $\neg\ (\ (p \wedge s\ ) \vee q\ ) \equiv \neg (p \wedge s) \wedge \neg q \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg p \vee \neg s) \wedge \neg q$ (clausulas 4 y 5)

¬C. $\neg (\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$)

$\neg (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))) \equiv$ (DeMorgan)

$\neg \neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg (\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg (\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg \neg (p \vee q) \vee \neg\neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee t \vee \neg s)$ (clausulas 6 y7)

*) Resolución:

C1. $\neg t \vee p$

C2. $\neg r \vee s$

C3. $r \vee s$

C4. $\neg p \vee \neg s$

C5. $\neg q$

C6. $\neg p \vee \neg q$

C7. $p \vee q \vee t \vee \neg s$

C8. $p \vee t \vee \neg s$ desde C7 con C5 (corte)

C9. $p \vee p \vee \neg s$ desde C8 con C1 (corte)

C10. $p \vee \neg s$ desde C9 (idempotencia)

C11. $\neg s \vee \neg s$ desde C10 con C4 (corte)

C12. $\neg s$ desde C11(idempotencia)

C13. $s \vee s$ desde C2 con C3 (corte)

C14. s desde C13(idempotencia)

C15. $\square$ desde C12 con C14 (corte)

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$T\ [\ r \wedge (\neg s \vee \neg t)\ ,\ \ p \rightarrow (q \rightarrow s)\ ,\ u \vee (p \wedge \neg q \wedge r)\ ,\ \neg\ (s \wedge \neg t) \vee \neg p\ ]\ \ \vdash\ \ (p \rightarrow \neg q) \wedge r$

Forma clausular de la estructura deductiva:

C1: r

C2: $\neg s \vee \neg t$

C3: $\neg p \vee \neg q \vee s$

C4', C4'', C4''' : $u \vee p$; $u \vee \neg q$; $u \vee r$ (no se usan en el proceso de resolución)

C4: $\neg s \vee t \vee \neg p$

negación de la conclusión: $\neg\ (\ (\neg p \vee \neg q) \wedge r\ )$ es $(p \wedge q) \vee \neg r$

C5: $(p \vee \neg r)$

C6: $(q \vee \neg r)$

C7: p	desde C1 con C5
C8: q	desde C1 con C6
C9: $\neg q \vee s$	desde C3 con C7
C10: s	desde C9 con C8
C11: $t \vee \neg p$	desde C4 con C10
C12: $\neg t$	desde C2 con C10
C13: $\neg p$	desde C11 con C12
C14: $\square$	desde C7 con C13

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T\,[\neg p \leftrightarrow (q \to r)\,,\ \neg q \to (\neg r \to \neg t)\,,\ p \vee t \to \neg p\,] \quad \vdash \quad \neg p \wedge (\neg t \vee r)$$

Fuente: examen enero 2015

$$T\,[\underbrace{\neg p \leftrightarrow (q \to r)}_{A1}\,,\ \underbrace{\neg q \to (\neg r \to \neg t)}_{A2}\,,\ \underbrace{p \vee t \to \neg p}_{A3}\,] \quad \vdash \quad \underbrace{\neg p \wedge (\neg t \vee r)}_{B}$$

- Forma clausular:

- $A1 \equiv \neg p \leftrightarrow (q \to r)$

$\equiv \neg p \to (q \to r) \wedge (q \to r) \to \neg p$

$\equiv (p \vee (q \to r)) \wedge (\neg (q \to r) \vee \neg p)$

$\equiv (p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee \neg p)$

$\equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg p)$

$\equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p)$

- $A2 \equiv \neg q \to (\neg r \to \neg t) \equiv q \vee (r \vee \neg t)$

- $A3 \equiv p \vee t \to \neg p \equiv \neg(p \vee t) \vee \neg p \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee \neg p$

$\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg t \vee \neg p)$

$\equiv \neg p \vee (\neg t \vee \neg p)$

- $\neg B \equiv \neg(\neg p \wedge (\neg t \vee r)) \equiv p \vee \neg(\neg t \vee r))$

$\equiv p \vee (t \wedge \neg r))$

$\equiv (p \vee t) \wedge (p \vee \neg r)$

$\Rightarrow \quad FC = \{ \underset{1}{p \vee \neg q \vee r}, \underset{2}{q \vee \neg p}, \underset{3}{\neg r \vee \neg p}, \underset{4}{q \vee r \vee \neg t}, \underset{5}{\neg p}, \underset{6}{\neg t \vee \neg p}, \underset{7}{p \vee t}, \underset{8}{p \vee \neg r} \}$

- Obtención de la cláusula vacía por resolución

$9 \equiv t$	(5,7)
$10 \equiv \neg r$	(5,8)
$11 \equiv p \vee \neg q$	(1,10)
$12 \equiv \neg q$	(5,11)
$13 \equiv r \vee \neg t$	(4,12)
$14 \equiv r$	(9,13)
$15 \equiv \square$	(10, 14)

Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de Resolución:

$$T [\neg s \wedge (r \rightarrow t) , \neg r \rightarrow (p \rightarrow q) , t \rightarrow \neg r] \quad \vdash \quad \neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p)$$

$$T [\underbrace{\neg s \wedge (r \rightarrow t)}_{A1} , \underbrace{\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)}_{A2} , \underbrace{t \rightarrow \neg r}_{A3}] \quad \vdash \quad \underbrace{\neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p)}_{B}$$

- Forma Normal Conjuntiva de premisas y de negación de la conclusión:

FNC de A1: $\neg s \wedge (\neg r \vee t)$ (interdefinición de $\rightarrow$)

FNC de A2: $\neg\neg r \vee (p \rightarrow q)$ (interdefinición de $\rightarrow$) $\equiv$ $r \vee (p \rightarrow q)$ (doble negación) $\equiv$

$\equiv$ $r \vee (\neg p \vee q)$ (interdefinición de $\rightarrow$) $\equiv$ $r \vee \neg p \vee q$ (asociatividad)

FNC de A3: $\neg t \vee \neg r$ (interdefinición de $\rightarrow$)

FNC de $\neg$B: $\neg (\neg s \wedge \neg (\neg q \wedge p))$ $\equiv$ $\neg\neg s \vee \neg\neg (\neg q \wedge p))$ (De Morgan) $\equiv$

$\equiv$ $s \vee (\neg q \wedge p)$ (eliminación de $\neg$) $\equiv$ $(s \vee \neg q) \wedge (s \vee p)$ (distributividad)

- Forma Clausular (FC) de A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ A3 $\wedge$ $\neg$B:

$\{ \neg s , \neg r \vee t , r \vee \neg p \vee q , \neg t \vee \neg r , s \vee \neg q , s \vee p \}$

- Resolución:

1. $\neg s$
2. $\neg r \vee t$
3. $r \vee \neg p \vee q$
4. $\neg t \vee \neg r$
5. $s \vee \neg q$
6. $s \vee p$

7. $\neg q$ (de C1 y C5)
8. p (de C1 y C6)
9. $r \vee \neg p$ (de C3 y C7)
10. r (de C9 y C8)
11. t (de C10 y C2)
12. $\neg t$ (de C10 y C4)
13. $\square$ (de C11 y C12)

Demostrar, justificando los pasos dados, que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$T [p \rightarrow (q \vee \neg r), \neg r \leftrightarrow \neg s, \neg (q \wedge (p \rightarrow r))] \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$

Fuente: eval LP 1415

- Recordatorio: Una deducción $T[A1, A2, ..., An] \vdash B$ es **correcta** sii $FC(A1 \wedge A2 \wedge ... \wedge An \wedge \neg B)$ es insatisfacible

Sea la deducción $T [A1, A2, ..., An] \vdash B$, donde:

A1: $p \rightarrow (q \vee \neg r)$

A2: $\neg r \leftrightarrow \neg s$

A3: $\neg (q \wedge (p \rightarrow r))$

B: $p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$

Esta deducción es correcta (es decir, B se deduce del conjunto de fórmulas A1, A2, y A3) si aplicando el método de resolución a la FC de $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge \neg B$ se obtiene la cláusula vacía.

- *Forma Normal Conjuntiva (FNC) de premisas y de negación de la conclusión*:
  - FNC de A1:
    - $p \rightarrow (q \vee \neg r)$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $\neg p \vee (q \vee \neg r)$
  - FNC de A2:
    - $\neg r \leftrightarrow \neg s$ — Interdefinición de $\leftrightarrow$
    - $(\neg r \rightarrow \neg s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg r)$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $(\neg\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg r)$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $(\neg\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg\neg s \vee \neg r)$ — Doble negación
    - $(r \vee \neg s) \wedge (\neg\neg s \vee \neg r)$ — Doble negación
    - $(r \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg r)$
  - FNC de A3:
    - $\neg (q \wedge (p \rightarrow r))$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $\neg (q \wedge (\neg p \vee r))$ — De Morgan
    - $\neg q \vee \neg (\neg p \vee r)$ — De Morgan
    - $\neg q \vee (\neg \neg p \wedge \neg r)$ — Doble negación
    - $\neg q \vee (p \wedge \neg r)$ — Distributividad
    - $(\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
  - FNC de $\neg$B:
    - $\neg (p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s))$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $\neg (\neg p \vee (\neg q \rightarrow \neg s))$ — Interdefinición de $\rightarrow$
    - $\neg (\neg p \vee (\neg\neg q \vee \neg s))$ — Doble negación

- $\neg (\neg p \vee (q \vee \neg s))$ De Morgan
- $\neg \neg p \wedge \neg (q \vee \neg s)$ Doble negación
- $p \wedge \neg (q \vee \neg s)$ De Morgan
- $p \wedge \neg q \wedge \neg \neg s$ Doble negación
- $p \wedge \neg q \wedge s$

- *Forma Clausular (FC) de A1 ∧ A2 ∧ A3 ∧ ¬B*:
  - FC = {C1: $\neg p \vee q \vee \neg r$, C2: $r \vee \neg s$, C3: $s \vee \neg r$, C4: $\neg q \vee p$, C5: $\neg q \vee \neg r$, C6: p, C7: $\neg q$, C8: s}

- *Resolución*:
  - C1: $\neg p \vee q \vee \neg r$
  - C2: $r \vee \neg s$
  - C3: $s \vee \neg r$
  - C4: $\neg q \vee p$
  - C5: $\neg q \vee \neg r$
  - C6: p
  - C7: $\neg q$
  - C8: s
  - R1 = C9: $q \vee \neg r$ (C1, C6)
  - R2 = C10: $\neg r$ (C7, R1)
  - R3 = C11: $\neg s$ (C2, R2)
  - R4 = C12: □

Como se ha deducido la cláusula vacía mediante el método de resolución, se puede concluir que la estructura deductiva es correcta.